Aplicações Multilineares e Polinômios Misto Somantes

Carlos Alberto Santana Soares

APLICAÇÕES MULTILINEARES E POLINÔMIOS MISTO SOMANTES

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Carlos Alberto Santana Soares e aprovada pela comisssão julgadora.

Campinas, 14 de abril de 1998

Prof. Dr. Mario Carvalho de Matos
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Mate-Temática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito Parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Soares, Carlos Alberto Santana

So11a Aplicações multilineares e polinômios misto somantes / Carlos Alberto Santana Soares -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1998.

Orientador : Mário Carvalho de Matos

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise funcional. 2. Polinômios. 3. Funções holomorfas. I. Matos, Mário Carvalho de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 27 de fevereiro de 1998

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Mário C. Matos

Prof (a). Dr (a). MÁRIO CARVALHO DE MATOS

Prof (a). Dr (a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof (a). Dr (a). RAYMUNDO LUIZ DE ALENCAR

Luiza Amália de Moraes

Prof (a). Dr (a). LUIZA AMÁLIA DE MORAES

Prof (a). Dr (a). MARY LILIAN LOURENÇO

Agradecimentos

Ao professor Mário C. Matos , pela seriedade e paciência com que me orientou neste trabalho.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, pelo afastamento concedido.

Ao meu amigo Jayme, que muito contribuiu para tornar os últimos quatro anos menos penosos.

À minha família, pelo apoio em todos os momentos mais difíceis.

À minha mãe, pelo carinho.

À Selva, pela paciência, carinho e alegria com que me brindou nestes anos, sem os quais este doutoramento teria sido muito árduo.

À minha avó, por estar sempre me incentivando a buscar a felicidade, e em particular, por entender que a realização deste trabalho faz parte desta felicidade.

Sumário

Lista de Notações

$l_p(E)$ = conjunto das sequências absolutamente p somáveis

$l_p^w(E)$ = conjunto das sequências fracamente p somáveis

$l_{(s,p)}^m(E)$ = conjunto das sequências (s,p) misto somáveis

$B_{E'}$ = bola unitária no dual de E

$W(B_{E'})$ = conjunto das medidas de probabilidades regulares sobre $B_{E'}$

$L(E_1, \ldots, E_n; F)$ = conjunto das aplicações n-lineares contínuas do produto cartesiano de $E_1, \ldots, E_n$ em F

$\mathcal{P}(^nE; F)$ = conjunto dos polinômios contínuos de E em F

$L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ = conjunto das aplicações n-lineares $(q; p_1, \ldots, p_n)$ fracamente somantes

$L_{wd}^p(E_1, \ldots, E_n; F)$ = conjunto das aplicações n-lineares $(p/n, p, \ldots, p)$ fracamente somantes

$L_{ws}^{(q;p)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ = conjunto das aplicações n-lineares $(q; p, \ldots, p)$ fracamente somantes

$L_{as}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ = conjunto das aplicações n-lineares $(q; p_1, \ldots, p_n)$ absolutamente somantes

$\mathcal{P}_{as}^{(q;p)}(^nE; F)$ = conjunto dos polinômios $(q; p)$ absolutamente somantes

$\mathcal{P}_{ws}^{(q;p)}(^nE; F)$ = conjunto dos polinômios $(q; p)$ fracamente somantes

$\mathcal{P}_{wd}^p(^nE; F)$ = conjunto dos polinômios $(p/n; p)$ fracamente somantes

$L_m^{(s,q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ = conjunto das aplicações n-lineares $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ misto somantes

$\mathcal{P}_m^{(s,q;p)}(^nE; F)$ = conjunto dos polinômios $(s, q; p)$ misto somantes

$\mathcal{P}_{md}^{(s;p)}(^nE; F)$ = conjunto dos polinômios $(s, p/n; p)$ misto somantes

$\mathcal{P}_m^{(s;p)}(^nE; F)$ = conjunto dos polinômios $(s, p; p)$ misto somantes

$\mathcal{P}_{m,a}^{(s,p)}(^nE; F)$ = conjunto dos polinômios (s, p) misto somantes em a

$L_{m,a}^{(s,p)}(E; F)$ = conjunto dos operadores lineares (s, p) misto somantes em a

$\mathcal{M}_a^{(s,p)}(V; F)$ = conjunto das aplicações de V em F (s, p) misto somantes em a

$\Pi_a^p(V; F)$ = conjunto das aplicações de V em F p absolutamente somantes em a

Resumo

Neste trabalho, nós introduzimos alguns tipos polinômios e aplicações multilineares, generalizando alguns casos já bem estudados, tais como aplicações multilineares absolutamente somantes.

Inicialmente, provamos um teorema sobre aplicações fracamente somantes, e usamos este teorema para obter algumas generalizações . A seguir, estendemos para o caso multilinear alguns teoremas sobre aplicações misto somantes e vários resultados são provados. Mostramos que ultraprodutos são úteis para obter alguns tipos de aplicações multilineares.

Finalmente, o conceito de aplicações (s;p) misto somantes (não linear) de um subconjunto aberto A de um espaço de Banach E em um espaço F é introduzido, e mostramos que é possível considerar um tipo de holomorfia (s,p) misto somante (no sentido de Nachbin).

Abstract

In this work, we introduce some types of polynomial and multilinear mappings, generalizing some well-know classes of polinomials such as absolutely summing.

We first give a proof of a theorem about weakly summing mappings, and then we use this theorem to obtain some generalizations. Next, we extend for the multilinear case some theorems about mixed summing mappings and several results are proved. We proved that ultraproducts are quite useful in obtaining some multilinear mappings types.

Finally, the concept of (non-linear) (s,p) mixed summing mapping from an open subset A of a Banach space E into a Banach space F is introduced, and we show that it is possible to consider an (s,p) mixed summing holomorphy type (in Nachbin´s sense).

Introdução

O objetivo deste trabalho foi, inicialmente, estudar as aplicações n-lineares e polinômios misto somantes. Ao começarmos, notamos que um outro tipo de aplicações surgia naturalmente, e estas nos pareciam tão importantes quanto as primeiras, e daí, passamos a nos interessar também pelas aplicações multilineares fracamente somantes.

A noção de operadores misto somantes, não com esta terminologia, tem sua origem no trabalho de Maurey[17] , quando este estuda operadores lineares fatoráveis, e fixados $0 < p \leq q \leq \infty$, caracteriza, através de uma condição sobre o operador I_E, os espaços de Banach E tais que, para todo espaço de Banach F, tem se:

$$L_{as}^q(E;F) = L_{as}^p(E;F),$$

onde $L_{as}^q(E;F) = \{T : E \longrightarrow F$ lineares e absolutamente q somantes $\}$.

Em [20] Pietsch introduz as sequências misto somáveis. Para entender a importância deste tipo de sequência,vale lembrar que se um espaço de Banach E é de dimensão infinita então sempre existem sequências (x_i) em $l_p^w(E) \setminus l_p(E)$, isto é, sequências que são fracamente p somáveis mas não são p absolutamente somáveis. A noção introduzida por Pietsch nos mostra que, ainda assim, podemos tentar "separar" (x_i) em duas partes. A maneira de se fazer isto, é simplesmente tentar escrever:

$$x_i = \tau_i y_i, \text{ com } (\tau_i) \in l_r \text{ e } (y_i) \in l_s^w(E) \quad (1/r + 1/s = 1/p)$$

Através desta idéia, Pietsch introduziu as sequências misto somáveis, quais sejam, aquelas que admitem uma separação do tipo acima. Daí são introduzidos os operadores (s,p) misto somantes, isto é, operadores que tranformam sequências fracamente p somáveis em (s,p) misto somáveis.Vale dizer que a condição obtida por Maurey, citada acima, equivale a ter I_E (s,p) misto somante. Pietsch mostra ainda, qual a relação entre estes operadores e os operadores p somantes, introduzindo em [20] a teoria multilinear.

Em [2], Matos e Alencar estendem a teoria dos operadores p-somantes às aplicações n-lineares e aos polinômios n-homogêneos, daí a idéia de verificarmos o que acontece, ao tentarmos estender a teoria de Pietsch, para o caso (s;p) misto somante multilinear.

Como não poderia deixar de ser, fomos levados a considerar a questão da composição de polinômios e operadores lineares. Verificamos que um problema surgia, qual seja, sequências fracamente p somáveis não são necessariamente transformadas em fracamente p somáveis por polinômios. Em outras palavras, se $P \in \mathcal{P}(^nE; F) =$ { polinômios n-homogêneos contínuos de E em F } e se (x_i) está em $l_p^w(E)$ não temos necessariamente (Px_i) em $l_p^w(F)$, o que nos levou ao interesse pelos polinômios fracamente somantes. Vale lembrar, que no caso linear, não temos este problema, ou seja, todo operador linear contínuo transforma sequências fracamente p somáveis numa sequência do mesmo tipo, e portanto se torna desnecessário este estudo no caso linear.

O presente trabalho tem por objetivo então introduzir as aplicações fracamente somantes e misto somantes tentando verificar, na medida do possível, suas relações com as aplicações absolutamente somantes, já que como no caso linear, estas últimas já foram objeto de maior estudo. A partir daí, obtemos alguns resultados, através de resultados provados anteriormente por Matos[14] e por Aron[3].já conhecidos para aplicações n-lineares absolutamente somantes, resultados estes, que o leitor interessado pode encontrar em Matos[14] ou Aron[3].

O trabalho está dividido em nove seções.

Inicialmente, apresentamos as sequências (s;p) misto somáveis e sua caracterização, como em Pietsch [2], o que nos será de grande utilidade, já que boa parte de nosso estudo tem essa caracterização como suporte. A caracterização obtida nesta seção nos será fundamental uma vez que, na maioria das vezes, não é tão simples decidirmos quando temos, ou não,uma separação do tipo anteriormente descrito para uma sequênci.

Logo a seguir, introduzimos as aplicações n lineares fracamente $(q; p_1, \ldots, p_n)$ somantes, caracterizando-as como aquelas aplicaçõe, cuja composição com funcionais lineares contínuos, resultam em aplicações $(q; p_1, \ldots, p_n)$ absolutamente somantes.

Na terceira seção, fazemos um estudo dos polinômios fracamente $(q; p)$ somantes, obtendo uma caracterização via um teorema de dominação no caso em que $q = p/n$, onde n é o grau do polinômio. Usando um resultado de Botelho[4], mostramos ainda que existem espaços de Banach E, tais que para todo espaço de Banach F , todo polinômio P em $\mathcal{P}(^2E; F)$ é fracamente (2;1) somante. Apresentamos um exemplo, mostrando que isto não é verdade em geral.

Na seção seguinte, passamos a trabalhar com as aplicações $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ misto somantes, caracterizando-as como aquelas aplicações n lineares tais que sua composição com um operador linear s somante resulta absolutamente $(q; p_1, \ldots, p_n)$ somante. Para alguns casos, conseguimos também um teorema de dominação.

Os polinômios misto somantes vêm a seguir, deixando claro as relações entre fracamente somante, absolutamente somante e misto somante. Definimos ainda como um espaço (s,p), aquele espaço de Banach sobre o qual a identidade é (s,p) misto somante, caracterizando-o através de polinômios p absolutamente somantes. Generalizamos ainda no teorema 55 um fórmula de composição já conhecida no caso linear.

A extensão de polinômios misto somantes, é objeto de estudo na seção seguinte, onde mostramos que os polinômios do tipo aqui estudados são estáveis por ultraprodutos. Esta estabilidade nos permitirá estender polinômios dos tipos acima que estejam definidos sobre um espaço de Banach E, com valores em $\mathbb{K}$, pelo menos até E''.

Reservamos para a seção seguinte alguns exemplos que irão ilustrar, como resultados já conhecidos no caso linear podem ser generalizados para o caso multilinear. Em particular, mostramos que se E_i é um espaço de cotipo 2 para algum $i (1 \leq i \leq n)$, então toda A em $L(E_1, \ldots, E_n; F) = \{$ aplicações n-lineares contínuas de $E_1 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} E_n$ em $F\}$ será $(2, 1, \ldots, 1)$ misto somante.

A tentativa de generalizar a noção de misto somante para qualquer função, nos leva a uma versão local, cujo estudo desenvolvemos na seção oito, amparado em alguns resultados de Matos[16]. Obtemos, ainda, caracterizações locais análogas às obtidas no caso polinomial, que muito nos auxiliarão na seção seguinte.

Finalmente, na seção nove, introduzimos um tipo de holomorfia, no sentido de Nachbin, gerado pelos polinômios misto somantes. Como nas seções anteriores, mostramos sua relação com o tipo de holomorfia gerado pelos polinômios absolutamente somantes, tipo este introduzido por Matos em [16].Terminamos mostrando que este tipo de holomorfia é ainda um α tipo, como definido por Dineen em [8].

Acredito, que no futuro, devamos explorar um pouco mais as consequências dos resultados das seções oito e nove, inclusive quanto ao tipo de holomorfia introduzido.Quanto às seções anteriores, penso que devemos tentar avançar um pouco mais na busca de relacionar o conceito de cotipo de um espaço com os polinômios misto somantes ou fracamente somantes.

Para finalizar, gostaríamos de ressaltar que as referências básicas para este trabalho são Matos [13] e Pietsch[20].

1-Sequências Somáveis

Definição:

Sejam $0 < p < \infty$ e E espaço de Banach. Uma sequência $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x_i \in E$, será dita **absolutamente p somável** se $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$. Neste caso anotaremos $\|(x_i)\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p)^{1/p}$ e definiremos ainda

$$l_p(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}},\ x_i \in E;\ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty\}$$

.

É fácil ver que $l_{p_1} \subset l_{p_2}$ e $\|.\|_{p_2} \leq \|.\|_{p_1}$ se $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$
Para $p = \infty$ faremos

$$l_\infty(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}},\ x_i \in E;\ \sup \|x_i\| < \infty\} \text{ e } \|x_i\|_\infty = \sup_i \|x_i\|$$

Definição:

Sejam $0 < p \leq \infty$ e E espaço de Banach. Uma sequência $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x_i \in E$, será dita **fracamente p-somável** se $(|<\varphi, x_i>|)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p(E)$ para todo $\varphi \in E'$. Neste caso, anotaremos

$$\|(x_i)\|_{w,p} \stackrel{\text{def}}{=} sup_{\varphi\in B_{E'}} \|(|<\varphi, x_i>|)\|_p$$

cuja existência pode ser verificada através do teorema do gráfico fechado ou princípio da limitação uniforme. Definiremos ainda

$$l_p^w(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}},\ x_i \in E \text{ e } (|<\varphi, x_i>|)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p(E)\ \ \forall\varphi \in E'\}$$

Tal como no caso anterior é simples verificar que $l_{p_1}^w(E) \subset l_{p_2}^w(E)$ e $\|.\|_{w,p_2} \leq \|.\|_{w,p_1}$ se $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$

Definição:

Sejam $0 < p \leq s \leq \infty$, r tal que $1/r + 1/s = 1/p$ e E espaço de Banach. Uma seqüência $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $x_i \in E$, será dita de **tipo (s,p) misto somável** se puder ser escrita na forma

$$x_i = \tau_i y_i$$

com $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_r$ e $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^w(E)$. Em tal caso anotaremos

$$\|x_i\|_{m,(s,p)} = inf\{\|\tau_i\|_r \|y_i\|_{w,s}\}$$

onde o infímo é tomado sobre todas as maneiras possíveis de escrever $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ na forma acima. Como nos casos anteriores definiremos ainda

$$l_{(s,p)}^m(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}};\ \ x_i = \tau_i y_i,\ \ \text{com } \|\tau_i\|_r < \infty \ \text{ e } \ \|y_i\|_{w,s} < \infty\}$$

Lema 1 [Ky Fan]

Seja $\mathcal{K}$ um subconjunto convexo compacto de um espaço linear topológico de Hausdorff. Seja ainda $\mathcal{F}$ uma coleção côncava de funçoẽs reais convexas semi-contínuas superiormente sobre $\mathcal{K}$. Suponhamos que para uma certa constante ρ, dada $\phi \in \mathcal{F}$ exista $x_\phi \in \mathcal{K}$ tal que $\phi(x_\phi) \leq \rho$. Então existe $x_0 \in \mathcal{K}$ tal que $\phi(x_0) \leq \rho$ para todo $\phi \in \mathcal{F}$.
(Vale observar que uma coleção $\mathcal{F}$ de funções reais é dita côncava sobre $\mathcal{K}$ se dados $n,\ \phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathcal{F}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ com $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ existe $\phi \in \mathcal{F}$ satisfazendo $\phi(x) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x)$, para todo $x \in \mathcal{K}$.)
Omitiremos a demonstração deste lema que pode ser encontrado em Pietsch[21].

Lema 2[21]

Sejam $0 < p < s < \infty$ e $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $x_i \in E$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Se $((\int_{B_{E'}} |< a, x_i >|^s \, d\mu(a))^{1/s})_{i\in\mathbb{N}} \in l_p$ para cada $\mu \in W(B_{E'})$, então

$$\sigma = sup\{\{\sum_{i=1}^{\infty}(\int_{B_{E'}} |< a, x_i >|^s \, d\mu(a))^{p/s}\}^{1/p},\ \ \mu \in W(B_{E'})\} < \infty$$

Vale ressaltar que $W(B_{E'})$ denota o conjunto das medidas de probabilidade regulares sobre $B_{E'}$

Demonstração:

Suponhamos existir $\mu_n \in W(B_{E'})$ tal que

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}(\int_{B_{E'}} |<a, x_i>|^s \, d\mu_n(a))^{p/s}\}^{1/p} \geq 2^{n/s}n \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Tomando $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n}\mu_n$, teremos $\mu \in W(B_{E'})$, com

$$\{\sum_{i=1}^{\infty}(\int_{B_{E'}} |<a, x_i>|^s \, d\mu(a))^{p/s}\}^{1/p} \geq n, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots,$$

o que contraria a hipótese inicial. Logo existe

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} sup\{\{\sum_{i=1}^{\infty}(\int_{B_{E'}} |<a, x_i>|^s \, d\mu(a))^{p/s}\}^{1/p}, \ \mu \in W(B_{E'})\} < \infty.$$

__Teorema 3[21]__

Sejam $0 < p < s < \infty$. Uma seqüência $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $x_i \in E$, será de tipo (s,p) misto somável se, e somente se, $((\int_{B_{E'}} |<a, x_i>|^s \, d\mu(a))^{1/s})_{i\in\mathbb{N}} \in l_p$ quando $\mu \in W(B_{E'})$. Além disso

$$\|x_i\|_{m,(s,p)} = sup\{\{\sum_{i=1}^{\infty}(\int_{B_{E'}} |<a, x_i>|^s \, d\mu(a))^{p/s}\}^{1/p}, \ \mu \in W(B_{E'})\}$$

Estamos tomando $B_{E'}$ com a topologia $\sigma(E', E)$

Demonstração:

$(\Rightarrow) x_i = \tau_i y_i$ com $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_r$ e $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_w^s(E)$. Usando a desigualdade de Hölder teremos

$$\{\sum_{i=1}^{\infty}(\int_{B_{E'}} |<a, x_i>|^s \, d\mu(a))^{p/s}\}^{1/p} = \{\sum_{i=1}^{\infty}\{|\tau_i|(\int_{B_{E'}} |<a, y_i>|^s \, d\mu(a))^{1/s}\}^p\}^{1/p} \leq \|\tau_i\|_r \|y_i\|_{w,s}$$

se $\mu \in W(B_{E'})$.

$(\Leftarrow)$ Tomemos $u = r/p$, $v = s/p$ onde $1/r + 1/s = 1/p$ e definamos

$$\mathcal{K} = \{(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}; \ \sum_{i=1}^{\infty}\eta_i^u \leq \sigma^p, \eta_i \geq 0\} \ \text{ e } \ \mathcal{F} = \{\phi_{\mu,\epsilon} : \mathcal{K} \to \mathbb{R}; \ \mu \in W(B_{E'}), \epsilon > 0\}$$

onde $\phi_{\mu,\epsilon}((\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty}(\eta_i + \epsilon)^{-v}\int_{B_{E'}} |<a, x_i>|^s \, d\mu(a)$ e σ como no lema anterior. Note que $\mathcal{F}$ é uma família côncava de funções convexas contínuas e $\mathcal{K}$ é fracamente compacto.Tomando agora

$$\xi_i = (\int_{B_{E'}} | < a, x_i > |^s \, d\mu(a))^{1/uv}$$

teremos $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}$ e daí

$$\phi_{\mu,\epsilon}((\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i + \epsilon)^{-v} \int_{B_{E'}} | < a, x_i > |^s \, d\mu(a) \leq \sigma^p$$

Logo, pelo Lema de Ky Fan, podemos encontrar $(\zeta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}$ tal que $\phi_{\mu,\epsilon}((\zeta_i)_{i\in\mathbb{N}}) \leq \sigma^p$ para todo $\phi_{\mu,\epsilon} \in \mathcal{F}$. Em particular para $\mu = \delta_{\{a\}}$ teremos

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\zeta_i + \epsilon)^{-v}| < a, x_i > |^s \leq \sigma^p$$

É claro que se $x_i \neq 0$, teremos $\zeta_i \neq 0$ e podemos tomar $\tau_i = \zeta_i^{1/p}$ e $y_i = \tau_i^{-1}x_i$. Se $x_i = 0$, tomamos $\tau_i = 0$ e $y_i = 0$. Notamos então, que em ambos os casos teremos $x_i = \tau_i y_i$ e além disso

$$(\sum_{i=1}^{k} | < a, y_i > |^s)^{1/s} = \lim_{\epsilon\to 0}(\sum_{i=1}^{k}(\zeta_i+\epsilon)^{-v}| < a, x_i > |^s)^{1/s} \leq \sigma^{1/v} \text{ e } \|\tau_i\|_r \leq (\sum_{i=1}^{\infty}|\zeta_i|^u)^{1/r} \leq \sigma^{p/r}$$

Teremos, então

$$\|\tau_i\|_r\|y_i\|_{w,s} \leq \sigma, \text{ o que nos leva a } \|x_i\|_{m,(s,p)} \leq \sigma$$

Não nos preocuparemos em fazê-lo, mas poderíamos agora ,usando o teorema acima, provar a proposição abaixo:

Proposição 4

$l^m_{(s,p)}(E)$ é um espaço normado (p normado) completo se $p \geq 1$ ($0 < p < 1$).

Proposição 5

Sejam $0 < p \leq s \leq \infty$ com $1/r + 1/s = 1/p$ e $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^m_{(s,p)}(E)$ então:

(i) $\|(x_i)\|_r \leq \|(x_i)\|_{m,(s,p)}$

(ii) $\|(x_i)\|_{w,s} \leq \|(x_i)\|_{m,(s,p)}$

Demonstração:

(i) Tomamdo $x_i = \tau_i y_i$ com $\|(\tau_i)\|_r \leq (1+\epsilon)\|(x_i)\|_{m,(s,p)}$ e $\|(y_i)\|_{w,s} \leq 1$, teremos:

$\|(x_i)\|_r = \|(\tau_i y_i)\|_r \leq \|(\tau_i)\|_r\|(y_i)\|_\infty \leq (1+\epsilon)\|(x_i)\|_{m,(s,p)}$, logo $\|(x_i)\|_r \leq \|(x_i)\|_{m,(s,p)}$

O ítem (ii) pode ser provado de maneira análoga.

Proposição 6

Sejam $0 < p \leq s \leq \infty$, E espaço de Banach, então:

(i) $l_p(E) \subset l^m_{(s,p)}(E) \subset l^w_p(E)$ com

$\|(x_i)\|_{w,p} \leq \|(x_i)\|_{m,(s,p)} \leq \|(x_i)\|_p$

(ii) $l^w_p(E) = l^m_{(p,p)}(E)$, $l_p(E) = l^m_{(\infty,p)}(E)$ e além disso

$\|(x_i)\|_{w,p} = \|(x_i)\|_{m,(p,p)}$ e $\|(x_i)\|_p = \|(x_i)\|_{m,(\infty,p)}$

Demonstração:

(i) Seja $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p(E)$. Se $0 < p < s < \infty$ o resultado segue direto do teorema 3. Se $s = \infty$, então teremos $r = p$ e podemos escrever $x_i = \|x_i\| \frac{x_i}{\|x_i\|}$, obtendo daí

$$\|(x_i)\|_{m,(\infty,p)} \leq \|(x_i)\|_r \|\frac{x_i}{\|(x_i)\|}\|_{w,\infty} = \|(x_i)\|_r = \|(x_i)\|_p$$

Se $s = p$, escreveremos $x_i = 1x_i$, e daí, $\|(x_i)\|_{m,(p,p)} \leq \|(x_i)\|_{w,s} = \|(x_i)\|_{w,p} \leq \|(x_i)\|_p$

Suponhamos agora $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^m_{(s,p)}(E)$. Então dado $\epsilon > 0$ tomemos $x_i = \tau_i y_i$ com $\|(\tau_i)\|_r \|(y_i)\|_{w,s} \leq (1+\epsilon)\|(x_i)\|_{m,(s,p)}$ e daí :

$$\|(x_i)\|_{w,p} = sup_{a\in B_{E'}} (\sum_{i=1}^{\infty} | < a, \tau_i y_i > |^p)^{1/p} \leq \|(\tau_i)\|_r \|(y_i)\|_{w,s} \leq (1+\epsilon)\|(x_i)\|_{m,(s,p)}.$$

Logo $\|(x_i)\|_{w,p} \leq \|(x_i)\|_{m,(s,p)}$.

O ítem (ii) é de fácil verificação.

Proposição 7

Sejam $0 < p_1 \leq s_1 \leq \infty, 0 < p_2 \leq s_2 \leq \infty, p_1 \leq p_2$ e E Banach. Então:

(i) Se $s_1 \geq s_2$, teremos $l^m_{(s_1,p_1)}(E) \subset l^m_{(s_2,p_2)}(E)$

(ii) Se $s_1 \leq s_2$ e $1/p_1 - 1/s_1 \geq 1/p_2 - 1/s_2$, teremos $l^m_{(s_1,p_1)}(E) \subset l^m_{(s_2,p_2)}(E)$

Demonstração:

(i) Segue direto do teorema 3.

(ii) Direto da definição.

Exemplo 1

Em l_2, tomemos $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a base canônica e seja $x_i = e_i/i$. Então $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \notin l_1(l_2)$, mas $(1/i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$ e $(e_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2^w(l_2)$; portanto $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{(2,1)}^m(l_2)$ e além disso

$\|(x_i)\|_{m,(2,1)} \leq \|1/i\|_2 \|(e_i)\|_{w,2} = \|(1/i)\|_2$, o que nos leva a $\|(x_i)\|_{m,(2,1)} = \|(1/i)\|_2$.

2-Aplicações Multilineares Fracamente Somantes

Definição:

Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$, espaços de Banach e $0 < q; p_1, \ldots, p_n \leq \infty$ tais que $1/q \leq 1/p_1 + \cdots + 1/p_n$. $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ será dita **$(q; p_1, \ldots, p_n)$ fracamente somante,** se e somente se, existir $\sigma \geq 0$ tal que

$$\|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i=1}^k\|_{w,q} \leq \sigma \|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1} \cdots \|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n} \quad (1)$$

para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $x_1^j, \ldots, x_k^j \in E_j$

Anotaremos

$$\|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} = \inf\{\sigma;\text{ satisfazendo } (1)\}.$$

Fixados $E_1, \ldots, E_n; F$, o conjunto das aplicações $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ que são $(q; p_1, \ldots, p_n)$ fracamente somantes será indicado por

$$L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

É interessante destacar os seguintes casos:

Se $1/q = 1/p_1 + \cdots 1/p_n$, então $A \in L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ será dita **fracamente $(p_1, \ldots, p_n)$ dominada** e anotaremos

$$A \in L_{wd}^{(p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F) \text{ assim como } \|A\|_{wd,(p_1,\ldots,p_n)}.$$

Se além disso $p_1 = \ldots = p_n = p$, então A será dita **fracamente p dominada,** e usaremos a notação

$$A \in L_{wd}^{p}(E_1, \ldots, E_n; F) \text{ e } \|A\|_{wd,p}$$

$A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ será dita ainda **$(q; p)$ fracamente somante** se (1) é válida com $p_1 = \ldots = p_n = p$ e neste caso escreveremos

$$A \in L_{ws}^{(q;p)}(E_1, \ldots, E_n; F) \text{ e } \|A\|_{w,(q;p)}$$

Teorema 8

$A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ será $(q; p_1, \ldots, p_n)$ fracamente somante se, e somente se, para quaisquer seqüências $(x_i^1)_{i\in \mathbb{N}} \in l_{p_1}^w(E_1), \ldots, (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{p_n}^w(E_n)$ tivermos $(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i=1}^\infty \in l_q^w(F)$

Demonstração:

($\Rightarrow$) É de fácil verificação, seguindo direto da definição.

($\Leftarrow$) É suficiente mostrar que qualquer $m \in \mathbb{N}$

$$sup\{\|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i=1}^m\|_{w,q}, \text{ com } \|(x_i^1)_{i=1}^m\|_{w,p_1} \leq 1, \ldots, \|(x_i^n)_{i=1}^m\|_{w,p_n} \leq 1\} < \infty$$

Se assim não o fosse dado $m \in \mathbb{N}$, existiriam $k_m \in \mathbb{N}$ e $x_1^1, \ldots, x_{k_m}^1 \in E_1, \ \ldots, \ x_1^n, \ldots, x_{k_m}^n \in E_n$ tal que

$$\|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i=1}^{k_m}\|_{w,q} \geq m2^{mn}$$

com $\|(x_i^1)_{i=1}^{k_m}\|_{w,p_1} \leq 1, \ldots, \|(x_i^n)_{i=1}^{k_m}\|_{w,p_n} \leq 1$. Daí teríamos

$$\|(x_i^1/2^m)_{i=1}^{k_m}\|_{w,p_1} \leq 1/2^m, \ldots, \|(x_i^n/2^m)_{i=1}^{k_m}\|_{w,p_n} \leq 1/2^m$$

Podemos obter então seqüências $(x_i^1)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{p_1}^w(E_1), \ldots, (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{p_n}^w(E_n)$, mas para cada m

$$\|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i=1}^\infty\|_{w,q} \geq m$$

o que contraria A ser $(q; p_1, \ldots, p_n)$ fracamente somante.

Lembremos que uma aplicação $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é dita $(q; p_1, \ldots, p_n)$ $(0 < \mathbf{q}, \mathbf{p_i} \leq \infty)$ absolutamente somante, com $1/q \leq \sum_{i=1}^n 1/p_i$, se existe $\sigma \geq 0$ tal que

$$\|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i=1}^k\|_q \leq \sigma\|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1}, \ldots, \|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n}$$

para quaiquer k e $x_1^i, \ldots, x_k^i \in E_i$. Neste caso, escreveremos

$$A \in L_{as}^{(q;p_1,\ldots,p_n)} \text{ e } \inf \sigma = \|A\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)}$$

Vale observar que se $\dim F < \infty$, então

$$L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F) = L_{as}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

para quaisquer $E_1, \ldots, E_n$ Banach e $0 < q, p_i \leq \infty$ com $1/q \leq \sum_{i=1}^{n} 1/p_i$

Vale relembrar o seguinte teorema, que pode ser encontrado em Matos[14].

Teorema 9

Sejam $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $0 < q; p_1 \ldots, p_n \leq \infty$, com $1/q = 1/p_1 + \cdots + 1/p_n$. São equivalentes:

(i) A é $(q; p_1, \ldots, p_n)$ absolutamente somante

(ii) Existem $\sigma \geq 0$ e medidas de probabilidade regulares $\mu_k \in W(B_{E_k'})$, $k = 1, \ldots, n$; tal que

$$\|A(x_i, \ldots, x_n)\| \leq \sigma \prod_{1 \leq k \leq n} \{\int_{B_{E_k'}} | < a, x_k > |^{p_k} d\mu_k(a)\}^{1/p_k}$$

para todo $x_k \in E_k$, $k = 1, \ldots, n$. Neste caso teremos

$$\|A\|_{(q;p_1,\ldots,p_n)} = \inf\{\sigma, \text{ satisfazendo desigualdade acima}\}$$

Teorema 10

Sejam $E_1, \ldots, E_n; F$ Banach, $0 < q, p_1, \ldots, p_n \leq \infty$ com $1/q \leq \sum_{i=1}^{n} 1/p_i$. $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ será $(q; p_1, \ldots, p_n)$ fracamente somante se, e somente se, para todo $\varphi \in F'$, φA for $(q; p_1, \ldots, p_n)$ absolutamente somante. Além disso teremos

$$\|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} = \sup_{\varphi \in B_{F'}} \|\varphi A\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)}$$

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Para $\varphi \in F'$ teremos:

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{k} < |\varphi, A(x_i^1, \ldots, x_i^n) > |^q)^{1/q} &\leq \|\varphi\| \|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i=1}^k\|_{w,q} \\ &\leq \|\varphi\| \|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} \|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1}, \ldots, \|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n}\end{aligned}$$

Daí temos $\varphi A \in L_{as}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e além disso teremos ainda

$$\|\varphi A\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)} \leq \|\varphi\| \|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} \text{ ou}$$

$$\sup_{\varphi \in B_{F'}} \|\varphi A\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)} \leq \|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} \quad (2)$$

($\Leftarrow$) Se A não é $(q; p_1, \ldots, p_n)$ fracamente somante então existem seqüências $(x_i^1)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{p_1}^w(E_1), \ldots, (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{p_n}^w(E_n)$ tal que $\|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i\in\mathbb{N}}\|_{w,q} = \infty$.
Daí existe $\varphi \in B_{F'}$ tal que $\|(\varphi A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i\in\mathbb{N}}\|_q = \infty$ e consequentemente φA não é $(q; p_1, \ldots, p_n)$ absolutamente somante.
Teremos ainda

$$(\sum_{i=1}^{k} | < \varphi, A(x_i^1, \ldots, x_i^n) > |^q)^{1/q} \leq \|\varphi A\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)} \|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1} \cdots \|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n}$$

e daí

$$\|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} \leq \|\varphi A\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)}$$

o que juntamente com (2), nos leva a

$$\|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} = \sup_{\varphi\in B_{F'}} \|\varphi A\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)}$$

Os 2 últimos teoremas nos levam ao teorema.

Teorema 11

Sejam $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $1/q = 1/p_1 + \cdots + 1/p_n$, $0 < q$, $p_i \leq \infty$. A será $(q; p_1, \ldots, p_n)$ fracamente somante, isto é $(p_1, \ldots, p_n)$ fracamente dominada se, e somente se, existe $\sigma \geq 0$ tal que dado $\varphi \in B_{F'}$, existem $\mu_{1\varphi}, \ldots, \mu_{n\varphi} \in W(B_{F'})$ satisfazendo

$$\|\varphi A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \sigma \prod_{i=1}^{n} (\int_{B_{E_i'}} | < a, x_i > |^{p_i} \, d\mu_{i\varphi}(a))^{1/p_i}$$

Teremos ainda

$$\|A\|_{wd,(p_1,\ldots,p_n)} = \inf \sigma$$

Teorema 12

Se $A \in L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $T \in L(F, G)$ então $TA \in L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; G)$ e além disso $\|TA\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} \leq \|T\| \|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)}$.

Demonstração:

Dados $x_1^j, \ldots, x_k^j \in E_j$ para $j = 1, \ldots, n$ e $\varphi \in B_{G'}$ teremos:

$$(\sum_{i=1}^{k} | < \varphi, TA(x_i^1, \ldots, x_i^n) > |^q)^{1/q} \leq \|T\| \|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} \|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1}, \ldots, \|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n}$$

Proposição 13

Sejam $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ $E_j, j = 1, \ldots, n, F$ espaços de Banach e $i : F \hookrightarrow G$ uma imersão isométrica. Então $A \in L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ se, e somente se, iA $\in L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; G)$ e neste caso teremos:

$$\|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} = \|iA\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)}$$

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Segue do teorema anterior, já que $\|iA\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} \leq \|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)}$.

$(\Leftarrow)$ Dado $\varphi \in B_{F'}$, podemos usar Hahn-Banach para obter $\phi \in B_{G'}$ tal que $\varphi(x) = \phi i(x)$ e daí teremos:

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{k} | < \varphi, A(x_i^1, \ldots, x_i^n) > |^q)^{1/q} &= (\sum_{i=1}^{k} | < \phi, iA(x_i^1, \ldots, x_i^n) > |^q)^{1/q} \\
&\leq \|(iA(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i=1}^k\|_{w,q} \\
&\leq \|iA\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} \|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1}, \ldots, \|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n}
\end{aligned}$$

Portanto $A \in L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e além disso

$$\|A\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)} \leq \|iA\|_{w,(q;p_1,\ldots,p_n)}$$

Teorema 14

Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$(reais ou complexos), $0 < q, p_1, \ldots, p_n \leq \infty$ com $1/q \leq \sum_{i=1}^n 1/p_i$. São equivalentes:

(i)Existe F Banach tal que $L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F) = L(E_1, \ldots, E_n; F)$

$(ii)L_{as}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n) = L(E_1, \ldots, E_n)$

(iii)Para todo G Banach, $L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; G) = L(E_1, \ldots, E_n; G)$

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $\varphi \in L(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$.Tomamos $x \in F$, $\|x\| = 1$ e definimos uma imersão isométrica $i : \mathbb{K} \hookrightarrow F$ tal que $i(1) = x$ e daí teremos $i\varphi \in$ $L(E_1, \ldots, E_n; F) = L_{ws,(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Logo, pela proposição anterior, $\varphi \in$ $L_{as}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Conseqüência direta do teorema 10.

(iii)$\Rightarrow$(i) Nada a demonstrar.

O seguinte resultado pode ser encontrado em Floret e Matos[9] e voltará a ser abordado posteriormente.

Teorema 15

Sejam $p_j, q \in [1, \infty]$ com $\sum_{j=1}^{n} 1/p_{j'} \leq 1/q'$. Então

$$L(E_1, \ldots, E_n; F) = L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F) \;\; \forall \;\; E_1, \ldots, E_n; F \text{ Banach}$$

Uma consequência importante do resultado acima é que

$$L(E_1, \ldots, E_n; F) = L_{ws}^{(1,\ldots,1)}(E_1, \ldots, E_n; F) \;\; \forall \;\; E_1, \ldots, E_n, F \;\; \text{Banach}.$$

A prova desta proposição será feita um pouco adiante.

Vale ressaltar, que é simples estender o teorema acima, para o caso $0 < p_j \leq \infty$, isto é, temos:

Corolário 16

Sejam $0 < p_j \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ com $p_j < 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$ ou $\sum_{p_j' \geq 1} \leq 1/q'$. Então

$$L(E_1, \ldots, E_n; F) = L_{ws}^{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

para todo $E_1, \ldots, E_n, F$ Banach.

3-Polinômios Fracamente Somantes

Definição:

$P \in \mathcal{P}(^nE, F)$ será dito (q,p) **fracamente somante** com $0 < 1/q \leq n/p$ se existe $\sigma \geq 0$ tal que

$$\|(P(x_i))_{i=1}^k\|_{w,q} \leq \sigma \|(x_i)_{i=1}^k\|_{w,p}^n \quad \forall \ x_1, \ldots, x_k \in E \text{ e } k \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Anotaremos $\|P\|_{ws,(q,p)} = \inf\{\sigma; \ \sigma \text{ satisfaz } (3)\}$

Se $q = p$ então P será dito **fracamente p somante** e indicaremos $\|P\|_{ws,p} = \|P\|_{ws,(p,p)}$

Fixados E e F o conjunto dos polinômios $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$ fracamente (q,p) somantes será indicado por $\mathcal{P}_{ws}^{(q,p)}(^nE, F)$

Teorema 17

$P \in \mathcal{P}(^nE, F)$ será fracamente (q,p) somante se, e somente se, para toda $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^w(E)$ tivermos $((Px_i))_{i\in\mathbb{N}} \in l_q^w(F)$.

Demonstração:

Análoga à feita para o teorema 8.

Proposição 18

Sejam $P \in \mathcal{P}_{ws}^{(q,p)}(^nE, F)$, $T \in L(G, E)$ e $S \in L(F, Z)$. Então $SPT \in \mathcal{P}_{ws}^{(q,p)}(^nG, Z)$ e além disso

$$\|SPT\|_{ws,(q,p)} \leq \|S\| \|P\|_{ws,(q,p)} \|T\|^n$$

Demonstração

Dados $x_1, \ldots, x_k \in E$ teremos

$$\|(SPT(x_i))_{i=1}^k\|_{w,(q;p)} \leq \|S\| \|P\|_{ws,(q;p)} \| \|T\|^n \|(x_i)_{i=1}^k\|_{w,p}^n.$$

Dado $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$, indicaremos por $\check{P}$ a transformação simétrica n-linear associada.

A proposição abaixo, apesar de muito simples, nos será de grande utilidade.

Proposição 19

Sejam $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$, $T \in L(G, E)$ e $S \in L(F, Z)$. Então $(SPT)\check{} = S\check{P}T$

Teorema 20[Tonge[23]]

Sejam $0 < p \leq nq$. Então $P \in \mathcal{P}_{as}^{(q,p)}(E; F)$ se, e somente se, $\check{P} \in L_{as}^{(q,p)}(^nE, F)$. Além disso teremos

$$\|\check{P}\|_{as,(q;p)} \leq \frac{n^n}{n!}\|P\|_{as,(q;p)}; \text{ para } q \geq 1 \text{ e}$$

$$\|\check{P}\|_{as,(q;p)} \leq \frac{n^n}{n!}2^{nq-n}\|P\|_{as,(q;p)} \text{ se } q < 1.$$

Teorema 21

$P \in \mathcal{P}_{ws}^{(q,p)}$ é fracamente (q, p) somante se, e somente se, φP é absolutamente (q, p) somante para todo $\varphi \in F'$. Além disso teremos

$$\|P\|_{ws,(q;p)} = \sup_{\varphi \in B_{F'}} \|\varphi P\|_{as,(q;p)}.$$

Demonstração:

Análoga à demonstração do teorema 10.

Os dois últimos resultados ,juntamente com o teorema 10, nos levam facilmente ao teorema abaixo.

Teorema 22

Sejam $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$ e consequentemente $\check{P} \in L(^nE, F)$. Então $P \in \mathcal{P}_{ws}^{(q,p)}(^nE, F)$ se, e somente se , $\check{P} \in L_{ws}^{(q,p)}(^nE, F)$. Em tal caso teremos

$$\|\check{P}\|_{ws,(q;p)} \leq \frac{n^n}{n!}\|P\|_{ws,(q;p)}; \text{ para } q \geq 1 \text{ ou}$$

$$\|\check{P}\|_{ws,(q;p)} \leq \frac{n^n}{n!}2^{nq-n}\|P\|_{ws,(q;p)} \text{ se } q < 1.$$

Proposição 23

Sejam $1 \leq q \leq \infty$. Se $0 < p < 1$ ou $n/p' \leq 1/q'$ se $1 \leq p \leq \infty$, então

$$\mathcal{P}(^nE, F) = \mathcal{P}_{ws}^{(q,p)}(^nE, F)$$

Em particular teremos $\mathcal{P}(^nE, F) = \mathcal{P}_{ws}^{(1,1)}(^nE, F)$

Demonstração:

Segue direto do corolário 16 e do teorema 22.

Teorema 24

$P \in \mathcal{P}(^nE, F)$ será fracamente $(p/n, p)$ somante se, e somente se, existe $\sigma \geq 0$, tal que para todo $\varphi \in B_{F'}$ existe $\mu_\varphi \in W(B_{E'})$ satisfazendo

$$| < \varphi, Px > | \leq \sigma(\int_{B_{E'}} | < x, a > |^p \, d\mu_\varphi(a))^{n/p} \;\; \forall \;\; x \; \in \; E$$

teremos ainda $\|P\|_{ws,(p/n,p)} = \inf \sigma$.

Em analogia com o caso p dominado, doravante chamaremos **polinômios p fracamente dominados** aos polinômios $P \in \mathcal{P}_{ws}^{(p/n,p)}(^nE, F)$ e anotaremos

$$P \in \mathcal{P}_{wd}^{p}(^nE, F) \;\; \text{e} \;\; \|P\|_{wd,p}$$

Teorema 25

Sejam $0 < p \leq nq \leq \infty$. Então $\mathcal{P}(^nE) = \mathcal{P}_{as}^{(q,p)}(^nE)$ se, e somente se, $\mathcal{P}(^nE, F) = \mathcal{P}_{ws}^{(q,p)}(^nE, F)$ para todo F. Em particular $\mathcal{P}(^nE) = \mathcal{P}_{d}^{p}(^nE)$ se, e somente se, $\mathcal{P}(^nE, F) = \mathcal{P}_{wd}^{p}(^nE, F)$ para todo F Banach.

Demonstração:

Resulta dos teoremas 14 e 22.

Vale neste ponto enunciar um resultado de Botelho, qual seja:

Teorema 26[Botelho [4]]

Se $\mathcal{K}$ é um espaço topológico de Hausdorff compacto, então

$$\mathcal{P}({}^2C(\mathcal{K})) = \mathcal{P}_{as}^{(1,2)}({}^2C(\mathcal{K}))$$

Os dois últimos teoremas têm como conseqüência o teorema.

Teorema 27

Se $\mathcal{K}$ é um espaço topológico de Hausdorff compacto, então para todo F teremos

$$\mathcal{P}({}^2C(\mathcal{K}), F) = \mathcal{P}_{wd}^2({}^2C(\mathcal{K}), F)$$

Demonstração:

Segue direto dos teoremas 25 e 26.

Vale observar que a proposição 3.21 de [4],aplicada com $F = C(\mathcal{K})$, nos diz que se $n > 2$ e $r < \infty$ então

$$\mathcal{P}({}^nC(\mathcal{K})) \neq \mathcal{P}_{wd}^r({}^nC(\mathcal{K})) = \mathcal{P}_d^r({}^nC(\mathcal{K}))$$

Teorema 28[Matos[15]]

Se $dimE = \infty$ e $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$ então, $P(x) = \varphi(x)^{n-1}x \in \mathcal{P}({}^nE, E)$ não é $(p/n, p)$ absolutamente somante.

Demonstração:

Se P fosse $(p/n, p)$ absolutamente somante, então pelo teorema 20 $\check{P}$ também o seria. Mas notemos que

$$\check{P}(x_1, \ldots, x_n) = 1/n \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1}) \ldots \varphi(x_n)x_j$$

Tomando agora, x_0 tal que $\varphi(x_0) = 1$ e fazendo $x_1 = \ldots = x_{n-1} = x_0$ e $x_n = x$ teremos

$$\check{P}(x_0, \ldots, x_0, x) = \frac{n-1}{n}\varphi(x)x_0 + \frac{1}{n}x.$$

Logo se $T(x) = \frac{n-1}{n}\varphi(x)x_0 + \frac{1}{n}x$ vemos que $T \in L(E;E)$.

Usando agora o teorema 9, existem $\mu_1, \ldots, \mu_n \in W(B_{E'})$ e $C \geq 0$ tal que

$$\|\check{P}(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{E'}} |< a, x_j >|^p \, d\mu_j(a)\right)^{1/p}$$

o que nos leva a

$$\|Tx\| \leq C\|x_0\|^{n-1}\left(\int_{B_{E'}} |< a, x >|^p \, d\mu_n(a)\right)^{1/p}$$

Logo T será p absolutamente somante, e daí I_E também o será, então $P \notin L_{as}^{(p/n,p)}({}^nE;E)$.

Teorema 29

Se $dimE = \infty$ então $\mathcal{P}_{wd}^p({}^nE,E) \neq \mathcal{P}_d^p({}^nE,E)$.

Demonstração:

Pelo teorema acima, é suficiente mostrar que $P(x) = \varphi(x)^{n-1}x \in \mathcal{P}_{wd}^p({}^nE,E)$ se $\varphi \in B_{E'}$.

De fato, dado $\phi \in B_{E'}$ e $x_1, \ldots, x_k \in E$ teremos

$$\sum_{i=1}^{k} |< \phi, P(x_i) >|^{p/n} = \sum_{i=1}^{k} |< \phi, \varphi(x_i)^{n-1}x_i >|^{p/n} = \sum_{i=1}^{k}(|< \phi, x_i >|\,|\varphi(x_i)^{n-1}|)^{p/n} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{k} |< \phi, x_i >|^p + \sum_{i=1}^{k} |< \varphi, x_i >|^p \leq 2\|(x_i)_{i=1}^k\|_{w,p}^p$$

Observando as inclusões

$$\mathcal{P}_d^p({}^nE,E) \subset \mathcal{P}_{wd}^p({}^nE,E) \subset \mathcal{P}({}^nE,E)$$

par o caso $p = n = 2$ teremos:

$(i)\mathcal{P}_d^2({}^2E,E) \neq \mathcal{P}_{wd}^2({}^2E,E)$ sempre que $dimE = \infty$

(ii)Existem casos, tais que $\mathcal{P}_{wd}^2({}^2E,E) = \mathcal{P}({}^2E,E)$. Exemplo: $E = C(K)$

(iii)Existem casos tais que $\mathcal{P}_{wd}^2({}^2E,E) \neq \mathcal{P}({}^2E,E)$. Exemplo: $P : l_2 \to l_2$ dado por $P((\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (\alpha_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$ é tal que $P \in \mathcal{P}({}^2E,E)$ mas $P \notin \mathcal{P}_{wd}^2({}^2E,E)$ pois $\|e_i\|_{w,2} < \infty$ e $\|Pe_i\|_{w,1} = \infty$

Proposição 30

Seja $P \in \mathcal{P}_{ws}^{(q,p)}({}^nE,F)$. Se $T \in L_{as}^q(F,G)$, então $TP \in \mathcal{P}_{as}^{(q,p)}({}^nE,G)$ e $\|TP\|_{as,(q;p)} \leq \|T\|_{as,q}\|P\|_{ws,(q;p)}$

Demonstração:

$\|TP(x_i)\|_q \leq \|T\|_{as,q}\|P(x_i)\|_{w,q} \leq \|T\|_{as,q}\|P\|_{ws,(q,p)}\|x_i\|_{w,p}^n$

Podemos facilmente demonstrar ainda as seguintes proposições:

Proposição 31

Seja $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$. Se $TP \in \mathcal{P}_{as}^{(q,p)}(^nE, F)$ para todo G e toda $T \in L_{as}^q(F, G)$, então $P \in \mathcal{P}_{ws}^{(q,p)}(^nE, F)$.

Proposição 32

Seja $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$. Então P é fracamente p dominado se, e somente se, TP for p dominado quaisquer G e $T \in L_{as}^{p/n}(F, G)$.

4-Aplicações Multilineares Misto Somantes

Definição:

Sejam $0 < q \leq s \leq \infty$ e $0 < p_1, \ldots, p_n \leq \infty$ tais que $1/q \leq 1/p_1 + \ldots + 1/p_n$. $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ será dita $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ **misto somante** se existe $\sigma \geq 0$ tal que

$$\|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{j=1}^k\|_{m,(s,q)} \leq \sigma \|(x_j^1)_{j=1}^k\|_{w,p_1} \cdot \ldots \|(x_j^n)_{j=1}^k\|_{w,p_n} \quad (4)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_1^1, \ldots, x_k^1 \in E_1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_k^n \in E_n$.

Se tal σ existe, definimos $\|A\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)} = \inf\{\sigma;$ satisfazendo $(4)\}$

Se $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, A será dita $(s, q; p)$ **misto somante.**

Se além disso $p = nq$, diremos simplesmente que A é $(s; p)$ **misto somante.**

No caso em que $1/q = 1/p_1 + \cdots + 1/p_n$ A será dita $(s; p_1, \ldots, p_n)$ **misto dominada.**

Teorema 33

Sejam $0 < q \leq s \leq \infty$ e $0 < p_1, \ldots, p_n \leq \infty$. $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ será $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ misto somante se, e somente se, quaisquer que sejam $(x_i^1)_{i \in \mathbb{N}} \in l_{p_1}^w(E_1), \ldots, (x_i^n)_{i \in \mathbb{N}} \in l_{p_n}^w(E_n)$ tivermos $(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i \in \mathbb{N}} \in l_{(s,q)}^m(F)$, onde $1/q \leq 1/p_1 + \cdots + 1/p_n$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)Claro, pois basta observar que $\|(x_i)_{i \in \mathbb{N}}\|_{m,(s,q)} = \sup_j \|(x_i)_{i=1}^j\|_{m,(s,q)}$.

($\Leftarrow$)Basta mostar que

$$\begin{aligned} \tilde{A} : l_{p_1}^w(E_1) \times \ldots \times l_{p_n}^w(E_n) &\longrightarrow l_{(s,q)}^m(F) \\ (x_i^1, \ldots, x_i^n) &\longmapsto (A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

é contínua. Mas lembremos que $\|x_i\|_r \leq \|x_i\|_{m,(s,q)}$ se $1/r + 1/s = 1/q$, logo A é $(r, p_1, \ldots, p_n)$ absolutamente somante e portanto $i\tilde{A}$ é contínua , onde i é a inclusão

$$l_{(s,q)}^m(F) \overset{i}{\hookrightarrow} l_r(F).$$

O resultado segue do seguinte lema :

Lema 34

Sejam $A : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ n-linear e $T \in L(F,G)$ injetora com $E_1, \ldots, E_n, F$ respectivamente $p_1, \ldots, p_n, q$ normados. Então, se o gráfico de TA é fechado, o gráfico de A é fechado.

Demonstração:

Suponhamos que

$$\lim_{i\to\infty}(x_i^1, \ldots, x_i^n)_{i\in\mathbb{N}} = (x^1, \ldots, x^n)$$

onde $x_i^1 \in E_1, \ldots, x_i^n \in E_n \ \forall\, i \in \mathbb{N}$. Suponhamos ainda que

$$\lim_{i\to\infty} A(x_i^1, \ldots, x_i^n) = y$$

Então teremos

$$\lim_{i\to\infty} TA(x_i^1, \ldots, x_i^n) = Ty, \text{ e } Ty = TA(x_i^1, \ldots, x_i^n)$$

Daí, como T é injetora $y = A(x^1, \ldots, x^n)$

Vale ressaltar, que o teorema demonstrado acima, mostra que A é $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ misto somante se, e somente se, $\tilde{A}$ dada por $\tilde{A}((x_i^1), \ldots, (x_i^n)) = (A(x_i^1, \ldots, x_i^n))$ está em $L(l_{p_1}^w(E_1), \ldots, l_{p_n}^w(E_n); l_{(s;q)}^m(F))$ e além disso

$$\|A\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)} = \|\tilde{A}\|$$

. **Teorema 35**

$A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é $(s, q; p_1 \ldots, p_n), (s < \infty)$ misto somante se, e somente se, existe σ tal que

$$* = (\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{m} |< A(x_i^1, \ldots, x_i^n), b_j > |^s)^{q/s})^{1/q} \leq \sigma \|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1} \cdots \|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n} \|(b_j)_{j=1}^m\|_s \quad (5)$$

quaisquer que sejam $k, m \in \mathbb{N}$ e $x_1^1, \ldots, x_k^1 \in E_1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_k^n \in E_n$ e $b_1, \ldots, b_m \in F'$. Teremos ainda

$$\|A\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)} = \inf\{\sigma \text{ satisfazendo}(5)\}$$

Demonstração:

Caso $s = q$

($\Leftarrow$)Notemos que a desigualdade acima implica que para $b \in B_{F'}$ teremos

$$(\sum_{i=1}^{k} | < A(x_i^1, \ldots, x_i^n), b > |^q)^{1/q} \leq \sigma \|(x_i^1)\|_{w,p_1} \cdots \|(_i^n)\|_{w,p_n}$$

Logo

$$\|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i=1}^k\|_{w,q} \leq \sigma \|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1} \cdots \|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n}$$

e então

$$\|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i=1}^k\|_{m,(q,q)} \leq \sigma \|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1} \cdots \|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n}.$$

Além disso

$$\|A\|_{m,(q;q;p_1,\ldots,p_n)} \leq \sigma$$

($\Rightarrow$) Dados $x_1^1, \ldots, x_m^1 \in E_1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_m^n \in E_n$ se

$$A(x_i^1, \ldots, x_i^n) = \tau_i y_i \text{ teremos}$$

$$* = (\sum_{j=1}^{m}(\|b_j\|^q \sum_{i=1}^{k} | < \tau_i y_i, \frac{b_j}{\|b_j\|} > |)^q)^{1/q} \leq \|\tau_i\|_\infty \|b_j\|_q \|y_i\|_{w,q}.$$

Tomando ínfimo em ambos os membros, em relação às representações, vem

$$* \leq \|b_j\|_q \|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i=1}^k\|_{m,(q,q)} \leq \|b_j\|_q \|A\|_{m,(q,q)} \|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1} \cdots \|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n}$$

o que juntamente com a desigualdade anterior, nos leva a

$$\|A\|_{m,(q,q;p_1,\ldots,p_n)} = \inf_{\sigma \text{ satisfazendo } (5)} \sigma$$

Caso $s > q$

($\Rightarrow$)Dados $b_1, \ldots, b_m \in F'$definimos a medida de probabilidade

$$\nu = \sum_{j=1}^{m} \nu_j \delta_j$$

onde $\nu_j = \frac{\|b_j\|^s}{\sum_{j=1}^m \|b_j\|^s}$ e δ_j é a medida de Dirac no ponto $\tilde{b_j} = b_j / \|b_j\|$.

Sendo A $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ misto somante,dados $x_1^1, \ldots, x_k^1 \in E_1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_k^n \in E_n$ teremos:

$$
\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{m}| < A(x_i^1,\ldots,x_i^n),b_j > |^s)^{q/s})^{1/q} &= ((\sum_{i=1}^{k}(\int_{B_{F'}}| < A(x_i^1,\ldots,x_i^n),b > |^s\, d\nu(b))^{q/s})^{1/q})\|b_i\|_s \\
&\leq \|(A(x_i^1,\ldots,x_i^n))\|_{m,(s,q)}\|b_i\|_s \\
&\leq \|A\|_{m,(s;q;p_1,\ldots,p_n)}\|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1}\cdots\|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n}\|(b_i)_{i=1}^m\|_s
\end{aligned}
$$

Temos então $\inf\sigma \leq \|A\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}$.

($\Leftarrow$)Dada $\nu = \sum_{i=1}^{m}\nu_i\delta_i$ medida de probabilidade discreta sobre $B_{F'}$ teremos:

$$
\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{k}(\int_{B_{F'}}| < A(x_i^1,\ldots,x_i^n),b > |^s\, d\nu(b))^{q/s})^{1/q} &= (\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{m}| < A(x_i^1,\ldots,x_i^n),\nu_j^{1/s}b_j > |^s)^{q/s})^{1/q} \\
&\leq \sigma\|x_i^1\|_{w,p_1}\cdots\|x_i^n\|_{w,p_n}
\end{aligned}
$$

Como as medidas de probabilidade discretas são densas em $W(B_{F'})$, com respeito à topologia fraca estrela, teremos a desigualdade anterior verdadeira para toda $\nu \in W(B_{F'})$ e daí pelo teorema 3 temos

$$
\|(A(x_i^1,\ldots,x_i^n))_{i=1}^k\|_{m,(s,q)} \leq \sigma\|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1}\cdots\|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n} \quad \forall k\in\mathbb{N} \text{ e}
$$

$$
\|A\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)} = \inf\sigma
$$

.

Observação

Vale notar que, se $n=1$, então T é $(s,q;p)$ misto somante, com $0 < p \leq q \leq s$ se, e somente se, existe $\sigma \geq 0$ tal que

$$
\|(Tx_i)_{i=1}^k\|_{m,(s,q)} \leq \sigma\|(x_i)_{i=1}^k\|_{w,p} \quad \forall\, x_1,\ldots,x_k \in E
$$

Isto estende a definição dada em [20] para operadores $(s;q)$ misto somantes.

Teorema 36

Seja $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ tal que para todo espaço de Banach G e toda transformação linear $T \in L^r_{as}(F;G)$, TA é $(p; p_1, \ldots, p_n)$ absolutamente somante. Então existe $C \geq 0$ tal que

$$\|TA\|_{as,(p;p_1,\ldots,p_n)} \leq C\,\|T\|_{as,r} \;\; \forall G \;\text{ e }\; T \in L^r_{as}(F;G)$$

Demonstração:

É suficiente provar que

$$C = \sup\{\|TA\|_{as,(p,p_1,\ldots,p_n)} \;\text{ com }\; \|T\|_{as,r} \leq 1\} < \infty$$

Se assim não o fosse, dado k existiriam espaços de Banach F_k e $T_k \in L(F, F_k)$ tal que

$$\|T_k\|_{as;r} \leq \frac{1}{2^k} \;\text{ e }\; \|T_kA\|_{as,(p,p_1,\ldots,p_n)} \geq k$$

Mas então fazendo

$$l_2((F_k)_{k=1}^{\infty}) = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}},\ x_i \in F_i\,;\ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2_{F_i} < \infty\} \;\text{ e definindo}$$

$$\begin{aligned} J_k : F_k &\longrightarrow l_2(F_k) \\ x &\longmapsto (\delta_{ik}x)_{i=1}^{\infty}, \quad \text{onde } \delta_{ik} = \text{delta de Kronecker} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_j : l_2(F_k) &\longrightarrow F_j \\ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} &\longmapsto x_j \end{aligned}$$

e notando que $Q_jJ_k = \delta_{jk}I_k$ teremos então

$$\|\sum_{k=h}^{m} J_kT_k\|_{as,r} \leq \sum_{k=h}^{m} \|J_kT_k\|_{as,r} \leq \sum_{k=h}^{m} \|T_k\|_{as,r} \leq \sum_{k=h}^{m} 1/2^k.$$

Definimos então, $T = \sum_{k=1}^{\infty} J_kT_k \in L^r_{as}(F, l_2(F_k))$ e daí

$$k \leq \|T_kA\|_{as,(p;p_1,\ldots,p_n)} = \|Q_kTA\|_{as,(p;p_1,\ldots,p_n)} \leq \|TA\|_{as,(p;p_1,\ldots,p_n)}$$

contrariando TA ser $(p;p_1,\ldots,p_n)$ somante.

Teorema 37

Se $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ misto somante, então, para quaisquer G Banach e $T \in L(F, G)$ s absolutamente somante, tem-se TA $(q; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ absolutamente somante. Além disso

$$\|TA\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)} \leq \|T\|_{as,s}\|A\|_{m,(s;q;p_1,\ldots,p_n)}$$

Demonstração:

Sejam $x_1^1, \ldots, x_m^1 \in E_1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_m^n \in E_n$

Dado $\epsilon > 0$ teremos

$$A(x_i^1, \ldots, x_i^n) = \tau_i y_i$$

com $\|\tau_i\|_r \|y_i\|_{w,s} \leq (1+\epsilon)\|A\|_{m,(s;q;p_1,\ldots,p_n)}\|(x_i^1)_{i=1}^m\|_{w,p_1} \cdots \|(x_j^n)_{i=1}^m\|_{w,p_n}$

Como T é s somante teremos $\|Ty_i\|_s \leq \|T\|_{as,s}\|(y_i)\|_{w,s}$ e então:

$\|TA(x_i^1, \ldots, x_i^n)\|_q = \|T(\tau_i y_i)\|_q \leq \|\tau_i\|_r \|Ty_i\|_s \leq \|\tau_i\|_r \|T\|_{as,s}\|y_i\|_{w,s}$

$\leq \|T\|_{as,s}(1+\epsilon)\|A\|_{m,(s;q;p_1,\ldots,p_n)}\|x_i^1\|_{w,p_1} \cdots \|x_i^n\|_{w,p_n}$. Logo TA é $(q; p_1, \ldots, p_n)$ somante e além disso

$$\|TA\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)} \leq \|T\|_{as,s}\|A\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}$$

Teorema 38

Sejam $0 < q \leq \infty$, $1 \leq s < \infty$, $0 < p_1, \ldots, p_n \leq \infty$ e $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se para qualquer G Banach e $T \in L(F, G)$ s absolutamente somante tivermos TA $(q; p_1, \ldots, p_n)$ absolutamente somante, então A será $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ misto somante.

Demonstração:

Sejam $x_1^1, \ldots, x_m^1 \in E_1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_m^n \in E_n$ e $b_1, \ldots, b_k \in F'$. Definimos:

$$\begin{aligned} S: F &\longrightarrow l_s^k \\ y &\longmapsto (< b_i, y >)_{i=1}^k \end{aligned}$$

Notamos que $S \in L_{as}^s(F, l_s^k)$ e $\|S\|_{as,s} \leq \|b_k\|_s$ logo:

$$(\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{k}|<A(x_i^1,\ldots,x_i^n),b_j>|^s)^{q/s})^{1/q}=(\sum_{i=1}^{m}\|SA(x_i^1,\ldots,x_i^n)\|_s^q)^{1/q}\leq$$

$$\|SA\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)}\|(x_i^1)\|_{w,p_1}\cdots\|(x_i^n)\|_{w,p_n}\leq C\|S\|_{as,s}\|(x_i^1)\|_{w,p_1}\cdots\|(x_i^n)\|_{w,p_n}\leq$$

$$C\|b_k\|_s\|(x_i^1)\|_{w,p_1}\cdots\|(x_i^n)\|_{w,p_n}\quad (C \text{ dada pelo teorema 36})$$

Logo A é $(s,q;p_1,\ldots,p_n)$ misto somante e além disso

$$\|A\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}\leq C=\sup\{\|TA\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)} \text{ com } \|T\|_{as,s}\leq 1\}$$

o que juntamente com o teorema anterior nos leva a

$$\|A\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}=\sup\{\|TA\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)} \text{ com } \|T\|_{as,s}\leq 1\}$$

.

Proposição 39

Sejam $T_i \in L_m^{(s_i,p_i)}(E_i;F_i)$ para $i=1,\ldots,n$. Sejam ainda s e p tais que $1/s=1/s_1+\cdots+1/s_n$, $1/p=1/p_1+\cdots+1/p_n$ e $T\in L(E_1\mathrm{x}\ldots\mathrm{x}E_n,F_1\mathrm{x}\ldots\mathrm{x}F_n)$ dada por $T(x_1,\ldots,x_n)=(T_1x_1,\ldots,T_nx_n)$. Se $A\in L_{as}^{(s;s_1,\ldots,s_n)}(F_1,\ldots,F_n,G)$ então $AT\in L_{as}^{(p;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n,G)$

Demonstração:

Sejam $(x_1^1,\ldots,x_n^1),\ldots,(x_1^k,\ldots,x_n^k)\in E_1\mathrm{x}\ldots\mathrm{x}E_n$. Então dado $\epsilon>0$ teremos:

$$\begin{array}{ccccccc}
T_1x_1^i & = & \tau_1^i y_1^i & \text{com} & \|\tau_1^i\|_{r_1}\|y_1^i\|_{w,s_1} & \leq & (1+\epsilon)\|T_1\|_{m,(s_1,p_1)}\|x_1^i\|_{w,p_1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
T_nx_n^i & = & \tau_n^i y_n^i & \text{com} & \|\tau_n^i\|_{r_n}\|y_n^i\|_{w,s_n} & \leq & (1+\epsilon)\|T_n\|_{m,(s_n,p_n)}\|x_n^i\|_{w,p_n}
\end{array}$$

onde $1/r_j+1/s_j=1/p_j$ $j=1,\ldots,n$. Logo, se $1/r=1/r_1+\ldots+1/r_n$ vem:

$\|AT(x_1^i,\ldots,x_n^i)\|_p=\|A(T_1x_1^i,\ldots,T_nx_n^i)\|_p=\|A(\tau_1^iy_1^i,\ldots,\tau_n^iy_n^i)\|_p$

$=\||\tau_1^i|\ldots|\tau_n^i|A(y_1^i,\ldots,y_n^i)\|_p\leq\|\tau_1^i\cdots\tau_n^i\|_r\|A(y_1^i,\ldots,y_n^i)\|_s\leq$

$\|\tau_1^i\|_{r_1}\cdots\|\tau_n^i\|_{r_n}\|A\|_{as,(s;s_1,\ldots,s_n)}\|y_1^i\|_{w,s_1}\cdots\|y_n^i\|_{w,s_n}$

Daí $AT\in L_{as}^{(p;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n,G)$ e além disso:

$$\|AT\|_{as,(p;p_1,\ldots,p_n)}\leq\|A\|_{as,(s;s_1,\ldots,s_n)}\|T_1\|_{m,(s_1;p_1)}\cdots\|T_n\|_{m,(s_n;p_n)}$$

Corolário 40

Sejam $E_1, \ldots, E_n$ Banach. Suponhamos que as identidades $I_i \in L(E_i, E_i)$ sejam $(s_i; p_i)$ misto somante. Se $1/s = \sum_{i=1}^{n} 1/s_i$, $1/p = \sum_{i=1}^{n} 1/p_i$ e $A \in L_{as}^{(s;s_1,\ldots,s_n)}(E_1, \ldots, E_n, G)$ então $A \in L_{as}^{(p;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; G)$.

Teorema 41

Sejam $1 \leq q \leq s < \infty$ e $0 < p_1, \ldots, p_n \leq \infty$ com $1/q = \sum_{i=1}^{n} 1/p_i$. $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ será $(s; p_1, \ldots,$ [illegible] isto somant[illegible] e somente se, existe $\sigma \geq 0$ tal que para cada $\nu \in W(B_{F'})$ existem $\mu_1, \ldots, \mu_n \in W(B_{E_i'})$, $i = 1, \ldots, n$ tal que :

$$\left(\int_{B_{F'}} |< b, A(x^1, \ldots, x^n) >|^s \, d\nu(b)\right)^{1/s} \leq \sigma \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{B_{E_i'}} |< a, x^i >|^{p_i} \, d\mu_i(a)\right)^{1/p_i}$$

Além disso $\|A\|_{m,(s;p_1,\ldots,p_n)} = \inf\{\sigma, \text{ satisfazendo desigualdade acima}\}$

Demonstração:

$(\Leftarrow)$Teremos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{m} \left(\int_{B_{F'}} |< b, A(x_1^j, \ldots, x_n^j) >|^s \, d\nu(b)\right)^{q/s}\right)^{1/q} &\leq \sigma\left(\sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{B_{E_i'}} |< a, x_i^j >|^{p_i}\right)^{q/p_i}\right)^{1/q} \\
&\leq \sigma \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{B_{E_i'}} |< a, x_i^j >|^{p_i}\right)^{1/p_i} \\
&\leq \sigma \prod_{i=1}^{n} \|x_i^j\|_{w,p_i}
\end{aligned}$$

$(\Rightarrow)$Dada $\nu \in W(B_{F'})$ definimos

$$\begin{aligned}
T_\nu : F &\longrightarrow L_s(B_{F'}, \nu) \\
y &\longmapsto f_y
\end{aligned}$$

onde $f_y(b) = < b, y >$

Teremos então T_ν s absolutamente somante e $\|T_\nu\|_{as,s} = 1$. Como A é $(s; p_1, \ldots, p_n)$ misto somante, teremos ainda $T_\nu A$ $(q; p_1, \ldots, p_n)$ absolutamente somante e daí o resultado segue do teorema 9.

Teorema 42

Sejam $0 < q \leq s < \infty$ e $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$. A é $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$misto somante se, e somente se, iA é $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ misto somante onde $i : F \hookrightarrow G$ é uma imersão isométrica. Teremos ainda

$$\|iA\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)} = \|A\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Direto

($\Leftarrow$)Sejam $x_1^1, \ldots, x_k^1 \in E_1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_k^n \in E_n$ e $b_1, \ldots, b_m \in F'$.Usando Hahn-Banach obtemos $\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_m} \in G'$, com $\underline{b_i}(i(x)) = b_i(x)$ e $\|(b_i)\|_s = \|(\underline{b_i})\|_s$ e daí teremos:

$$(\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{m} | < A(x_i^1, \ldots, x_i^n), b_j > |^s)^{q/s})^{1/q} = (\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{m} | < A(x_i^1, \ldots, x_i^n), \underline{b_j i} > |^s)^{q/s})^{1/q}$$

$$\leq (\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{m} | < i(A(x_i^1, \ldots, x_i^n)), \underline{b_j}|^s)^{q/s})^{1/q} \leq \sigma\|(x_i^1)_{i=1}^k\|_{w,p_1} \cdots \|(x_i^n)_{i=1}^k\|_{w,p_n}\|(\underline{b_i})\|_s$$

onde $\sigma = \|iA\|_{m\,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}$ seguindo daí o resultado.

O teorema de Hahn-Banach nos mostra claramente que se F é um subespaço fechado de E e $x_1, \ldots, x_k \in F$ então:

$$\sup_{\varphi \in B_{F'}} (\sum_{i=1}^{k} | < \varphi, x_i > |^p)^{1/p} = \sup_{\phi \in B_{E'}} (\sum_{i=1}^{k} | < \phi, x_i > |^p)^{1/p}$$

Denotaremos por FIN(E) o conjunto

$$FIN(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{F; \text{subespaço de dimensão finita de} E\}$$

Temos então o teorema.

<u>Teorema 43</u>

$A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é $(q; p_1, \ldots, p_n)$ absolutamente somante se, e somente se, existe $\sigma \geq 0$ tal que $\forall\ \overline{E_1} \in FIN(E_1), \ldots, \overline{E_n} \in FIN(E_n)$ tivermos:

$$\begin{array}{rccc} A_{\overline{E_1},\ldots,\overline{E_n}}: & \overline{E_1}\mathrm{x}\cdots\mathrm{x}\overline{E_n} & \longrightarrow & F \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & A(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

$(q; p_1, \ldots, p_n)$ somante e $\|A_{\overline{E_1},\ldots,\overline{E_n}}\|_{as\,(q;p_1,\ldots,p_n)} \leq \sigma$

Proposição 44

O teorema acima ainda continua válido, se substituirmos $(q; p_1, \ldots, p_n)$ somante por $(q; p_1, \ldots, p_n)$ fracamente somante ou por $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ misto somante.

5-Polinômios Misto Somantes

Definição

$P \in \mathcal{P}(^nE, F)$ será dito $(s, q; p)$ **misto somante** $(0 < q \leq s \leq \infty)$ e $1/q \leq n/p$ se existe $\sigma \geq 0$ tal que:

$$\|(Px_i)_{i=1}^k\|_{m,(s,q)} \leq \sigma \|(x_i)_{i=1}^k\|_{w,p}^n \ \ \forall \ k \in \mathbb{N} \text{ e } x_1, \ldots, x_k \in E$$

Anotaremos $\|P\|_{m,(s,q;p)} = \inf\{\sigma;$ satisfazendo desigualdade acima$\}$.

Fixados E e F o conjunto dos polinômios $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ $(s, q; p)$ misto somantes será indicado por $\mathcal{P}_m^{(s,q;p)}(^nE; F)$.

Teorema 45

Sejam $0 < q \leq s \leq \infty$ e $1/q \leq n/p$. $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$ será $(s, q; p)$ misto somante se, e somente se, $(Px_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_{(s,q)}^m(F)$ sempre que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_p^w(E)$

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Consequência direta da definição.

$(\Leftarrow)$ É suficiente provar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(Px_i)_{i=1}^k\|_{m,(s,q)} \leq n_0 \text{ sempre que } \|(x_i)_{i=1}^k\|_{w,p} \leq 1/2^{n_0}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Se assim não o fosse, dado $n \in \mathbb{N}$ existiriam k_n e $x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n$ tal que

$$\|(x_i^n)_{i=1}^{k_n}\|_{w,p} \leq 1/2^n \ \text{ mas } \ \|(Px_i^n)_{i=1}^{k_n}\|_{m,(s,q)} > n.$$

Mas então a sequência $x_1^1, \ldots, x_{k_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{k_2}^2, \ldots$ estaria em $l_p^w(E)$ mas no entanto a sequência $Px_1^1, \ldots, Px_{k_1}^1, Px_1^2, \ldots, Px_{k_2}^2, \ldots$ não estaria em $l_{(s,q)}^m(F)$.

Vale ressaltar, tal como o fizemos no capítulo anterior, que mostramos acima que $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é $(s, q; p)$ misto somante se, e somente se, $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(^n l_p^w(E); l_{(s,q)}^m(F))$ onde

$$\widetilde{P}((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (Px_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

e temos ainda

$$\|P\|_{m,(s,q;p)} = \|\widetilde{P}\|.$$

Teremos então a proposição.

Proposição 46

P em $\mathcal{P}(^nE;F)$ será (s,q;p) misto somante se, e somente se, $\check{P}$ é (s,q;p) misto somante, e além disso temos

$$\|\check{P}\|_{m,(s,q;p)} \leq \frac{n^n}{n!}\|P\|_{m,(s,q;p)}$$

Demonstração:

Notando que $\overset{\smile}{\check{P}} = \check{\check{P}}$, o resultado segue do teorema anterior e do teorema 33.

Não nos ocuparemos em demonstrar os teoremas abaixo, pois os mesmos decorrem facilmente dos teoremas análogos para aplicações multilineares e da proposição acima.

Teorema 47

Sejam $0 < q \leq s < \infty$ e p tal que $1/q \leq n/p$. $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ será $(s,q;p)$ misto somante se, e somente se, existe $\sigma \geq 0$ tal que $\forall\ x_1,\ldots,x_m \in E$ e $b_1,\ldots,b_k \in F'$ tivermos

$$(\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{k}|< Px_i, b_j >|^s)^{q/s})^{1/q} \leq \sigma\|(b_j)\|_s\|(x_i)\|_{w,p}^n$$

Teorema 48

$P \in \mathcal{P}(^nE,F)$ será $(s,q;p)$ $(s \geq 1)$ misto somante se, e somente se, para quaisquer G e $T \in L_{as}^s(F,G)$ tivermos $TP \in L_{as}^{(q,p)}(^nE,G)$ e neste caso

$$\|P\|_{m,(s,q;p)} = \sup\{\|TP\|_{as\,(q,p)},\ \|T\|_{as,s} \leq 1\}$$

Teorema 49

$P \in P_m^{(s,q;p)}(^nE,F)$ com $q = p/n$ se, e somente se, existe $\sigma \geq 0$ tal que para toda $\nu \in W(B_{F'})$ existe $\mu \in W(B_{E'})$ tal que

$$(\int_{B_{F'}}|< b, Px >|^s\,d\,\nu(b))^{1/s} \leq \sigma(\int_{B_{E'}}|< a, x >|^p\,d\,\mu(a))^{n/p}$$

Em função do último teorema, se $P \in \mathcal{P}_m^{(s,q;p)}({}^nE,F)$ com $q = p/n$, diremos que P é $(s;p)$ misto dominado e anotaremos $\mathcal{P}_{md}^{(s,p)}$. Se $q = p$ diremos que P é $(s;p)$ misto somante, anotando $\mathcal{P}_m^{(s,p)}$.

Vale ressaltar que $P \in \mathcal{P}_{md}^{(s;p)}({}^nE;F)$ se, e somente se, $TP \in \mathcal{P}_d^p({}^nE,G)$ sempre que $T \in L_{as}^s(F,G)$

Proposição 50

Sejam $0 < p \leq s \leq \infty$. Então, se $T \in L_m^{(s,p)}(E,F)$ e $P \in \mathcal{P}_d^s({}^nF,G)$, teremos $PT \in \mathcal{P}_d^p({}^nE,G)$ e $\|PT\|_{d,p} \leq \|P\|_{d,s}\|T\|_{m,(s,p)}^n$.

Demonstração:

Dados $x_1,\ldots,x_k \in E$ e $\epsilon > 0$ teremos $Tx_i = \tau_i y_i$ com $\|\tau_i\|_r\|y_i\|_{w,s} \leq (1+\epsilon)\|T\|_{m\ (s,p)}\|x_i\|_{w,p}$.

Daí

$PTx_i = \tau_i^n P y_i$ e vem:

$$\|PTx_i\|_{p/n} \leq \|\tau_i^n\|_{r/n}\|Py_i\|_{s/n} \leq \|P\|_{wd,s}\|\tau_i\|_r^n\|y_i\|_{w,s}^n \leq \|P\|_{wd,s}(1+\epsilon)^n\|T\|_{m\ (s,p)}^n\|x_i\|_p^n$$

Logo

$$\|PTx_i\|_{p/n} \leq \|P\|_{wd,s}\|T\|_{m,(s,p)}^n\|x_i\|_p^n, \text{ e daí } PT \in \mathcal{P}_d^p({}^nE,G)$$

Vale observar que a proposição acima continua válida se substituirmos $\mathcal{P}_d^s$ e $\mathcal{P}_d^p$ respectivamente por $\mathcal{P}_{wd}^s$ e $\mathcal{P}_{wd}^p$.

Corolário 51

Se $I_E \in L_m^{(s;p)}(E,E)$, então $\mathcal{P}_d^s({}^nE,F) = \mathcal{P}_d^p({}^nE,F)$ $\forall$ F Banach ,$0 < p \leq s \leq \infty$

Definição

E espaço de Banach, será dito um **espaço** $(s;p)$, se a identidade for (s,p) misto somante.

Teorema 52

Seja $P \in \mathcal{P}_{wd}^p({}^nE,F)$. Então se $T \in L_m^{(s,p/n)}({}^nF,G)$ teremos

$$TP \in \mathcal{P}_m^{(s,p/n)}({}^nE,F) \text{ e } \|TP\|_{m\ (s,p/n)} \leq \|T\|_{m\ (s,p/n)}\|P\|_{wd,p}$$

Demonstração:

Dados $x_1, \ldots, x_k \in E$ teremos

$$\|TPx_i\|_{m\,(s,p/n)} \leq \|T\|_{m\,(s,p/n)} \|Px_i\|_{w,p/n} \leq \|T\|_{m\,(s,p/n)} \|P\|_{wd,p} \|(x_i)\|^n_{w,p}$$

daí segue o resultado.

<u>Corolário 53</u>

Se F é um espaço $(s, p/n)$ então $\mathcal{P}^p_{wd}(^nE, F) = \mathcal{P}^{(s,p)}_m(^nE, F)$

<u>Teorema 54</u>

Dado E espaço de Banach e $0 < p \leq q\,(q \geq 1)$, são equivalentes:

(i) I_E é misto somante, isto é, E é um espaço (q, p)

(ii) Para quaisquer F espaço de Banach e $n \in \mathbb{N}$ $L^p_d(^nE, F) = L^q_d(^nE, F)$

(iii) Para quaisquer F espaço de Banach e $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}^p_d(^nE, F) = \mathcal{P}^q_d(^nE, F)$

(iv) Para qualquer F espaço de Banach $L^p_{as}(E, F) = L^q_{as}(E, F)$

Demonstração:

(i)$\Rightarrow$ (ii) Segue direto do corolário 40

(ii)$\Rightarrow$(iii) Direto

(iii)$\Rightarrow$(iv)

Seja, então $T \in L^q_{as}(E, F)$ e definimos:

$$\begin{aligned} P: F &\longrightarrow \mathcal{P}(^nF') \\ x &\longmapsto P(x)(\varphi) = (\varphi(x))^n \end{aligned}$$

Como $P \in \mathcal{P}(^nF, \mathcal{P}(^nF'))$ teremos $PT \in \mathcal{P}^q_d(^nE, \mathcal{P}(^nF'))$ e daí por hipótese $PT \in \mathcal{P}^p_d(^nE, \mathcal{P}(^nF'))$ Mas, então dado $x \in E$ teremos

$$\|PT(x)\| = \sup_{\varphi \in B_{F'}} |P(Tx)(\varphi)| = \sup_{\varphi \in B_{F'}} |\varphi(Tx)|^n = \|Tx\|^n$$

seguindo daí o resultado.

(iv)$\Rightarrow$ (i) Consequência direta do teorema 48.

Teorema 55

Sejam $P \in \mathcal{P}_d^s({}^nF; G)$, $T \in L_{as}^r(E; F)$ então $PT \in \mathcal{P}_d^p({}^nE; G)$ se $1/r + 1/s = 1/p \leq 1$

Demonstração:

Como $L_{as}^r(E; F) \subset L_m^{(s,p)}(E; F)$ cf[21], o resultado segue da proposição 50.

Proposição 56

Se $T \in L_m^{(s,t)}(G; E)$ e $P \in \mathcal{P}_m^{(t,q;p)}({}^nF, G)$ então $TP \in \mathcal{P}_m^{(s,q;p)}({}^nF; E)$

Demonstração:

Dados $x_1, \ldots, x_k \in E$ tomemos $1/r' + 1/t = 1/q$ e $1/\bar{r} + 1/s = 1/t$ e teremos

$Px_i = \tau_i y_i$ com $\|\tau_i\|_{r'} \|y_i\|_{w,t} \leq (1+\epsilon)\|P\|_{m\ (t;p;q)} \|x_i\|_{w,p}^n$ e daí

$TPx_i = \tau_i T y_i$ e $Ty_i = \sigma_i z_i$ com $\|\sigma_i\|_{\bar{r}} \|z_i\|_{w,s} \leq (1+\epsilon)\|T\|_{m\ (s,t)} \|y_i\|_{w,t}$ Daí vem:

$\|TPx_i\|_{m,(s,q)} \leq \|\sigma_i \tau_i\|_r \|z_i\|_{w,s}$ onde $1/r + 1/s = 1/q$ e como $1/r' + 1/\bar{r} = 1/r$ teremos

$\|TP\|_{m,(s,q)} \leq \|\tau_i\|_{r'} \|\sigma_i\|_{\bar{r}} \|z_i\|_{w,s} \leq \|\tau_i\|_{r'} \|T\|_{m,(s,t)} \|y_i\|_{w,t} \leq \|T\|_{m,(s,t)} \|P\|_{m\ (t;p,q)} \|x_i\|_{w,p}^n$

6-Exemplos e Generalizações

Neste capítulo generalizaremos alguns resultados já conhecidos no caso linear, e para tanto nos será muito útil o seguinte teorema:

Teorema 57

Sejam $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, E_i, F espaços de Banach reais ou complexos e $\{n_1, \ldots, n_r\} \cup \{m_1, \ldots, m_s\} = \{1, \ldots, n\}$. Suponhamos existir K tal que para quaisquer $x_1 \in E_{n_1}, \ldots, x_r \in E_{n_r}$ a aplicação s-linear

$$\begin{array}{rcl} A_{x_1,\ldots,x_r} : E_{m_1} \text{x} \ldots \text{x} E_{m_s} & \longrightarrow & F \\ (x_{m_1}, \ldots, x_{m_s}) & \longmapsto & A(x_1, \ldots, x_{m_1}, \ldots, x_{m_s}, \ldots, x_n) \end{array}$$

seja absolutamente somante e além disso

$$\|A_{x_1,\ldots,x_r}\|_{as} \leq K \|x_1\| \ldots \|x_r\|$$

Então A é absolutamente somante.

Demonstração:

Dado $m \in \mathbb{N}$ tomamos $D_m = \{-1, 1\}^m$ e a medida μ sobre D_m dada por $\mu(e) = 1/2^m$ para $e = (e_1, \ldots, e_m) \in D_m$. Denotaremos por ϵ_j a projeção de D_m sobre $\{-1, 1\}$ tal que $\epsilon_j(e) = e_j$, $j = 1, 2 \ldots, m$. É fácil ver que

$$\int_{D_m} \epsilon_i(e)\epsilon_j(e)\, d\mu(e) = \delta_{ij} = delta\ de\ Kronecker$$

Para $x_1^1, \ldots, x_1^m \in E_1, \ldots, x_n^1, \ldots, x_n^m \in E_n$ tomamos $\varphi_j \in F'$ com

$$\|\varphi_j\| = 1 \quad \text{e} \quad \|A(x_1^j, \ldots, x_n^j)\| = \varphi_j A(x_1^j, \ldots, x_n^j) \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, m$$

e fazendo $\eta = \mu \otimes \ldots \otimes \mu$ teremos:

$$\int_{D_m^r} \sum_{j=1}^m \epsilon_j(e^{(1)}) \ldots \epsilon_j(e^{(r)}) \varphi_j A(\sum_{j_1=1}^m e_{j_1}^{(1)} x_1^{j_1}, \ldots, \sum_{j_r=1}^m e_{j_r}^{(r)} x_r^{j_r}, x_{r+1}^j, \ldots, x_n^j)\, d\eta(e^{(1)}, \ldots, e^{(r)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{j_1=1}^m \cdots \sum_{j_r=1}^m \varphi_j A(x_1^{j_1}, \ldots, x_r^{j_r}, x_{r+1}^j, \ldots, x_n^j) \int_{D_m^r} \epsilon_j(e^{(1)}) \ldots \epsilon_j(e^{(r)}) \epsilon_{j_1}(e_{j_1}^{(1)}) \ldots \epsilon_{j_r}(e_{j_r}^{(r)}) d\eta(e^{(1)}, \ldots, e^{(}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \varphi_j A(x_1^j, \ldots, x_n^j) = \sum_{j=1}^{m} \|A(x_1^j, \ldots, x_n^j)\|$$

Daí:

$$\sum_{j=1}^{m} \|A(x_1^j, \ldots, x_n^j)\| \le \int_{D_m^r} \sum_{j=1}^{m} \|A(\sum_{j_1=1}^{m} e_{j_1}^{(1)} x_1^j, \ldots, \sum_{j_r=1}^{m} e_{j_r}^{(r)} x_r^j, x_{r+1}^j, \ldots, x_n^j)\| \le$$

$$\|A_{z_1,\ldots,z_r}\|_{as} \|(x_{r+1}^j)_{j=1}^m\|_{w,1} \ldots \|(x_n^j)_{j=1}^m\|_{w,1}, \quad \text{onde } z_p = \sum_{j_r}^{m} e_{j_p}^{(p)} x_p^{j_r}, \quad p = 1, \ldots, r.$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{m} \|A(x_1^j, \ldots, x_n^j)\| \le K \|\sum_{j_1}^{m} e_{j_1}^{(1)} x_1^{j_1}\| \ldots \|\sum_{j_r}^{m} e_{j_r}^{(r)} x_r^{j_r}\| \|(x_{r+1}^j)_{j=1}^m\|_{w,1} \ldots \|(x_n^j)_{j=1}^n\|_{w,1}$$

seguindo daí o resultado.

No intuito de mostrar que o resultado obtido acima é o melhor possível, isto é , para $p > 1$ não é possível um resultado geral, voltemos a um resultado já mencionado, mas ainda não demonstrado, qual seja:

Teorema 58

Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach complexos e $\sum_{i=1}^{m} 1/q_i' \le 1/p'$ onde $q_i,\ p \in [1, \infty]$. Então

$$L(E_1, \ldots, E_m; F) = L_{ws}^{(p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_m; F)$$

Demonstração:

Notemos inicialmente que dados $x_1^1, \ldots, x_k^1 \in E_1, \ldots, x_1^m, \ldots, x_k^m \in E_m$ teremos

$$\begin{aligned}
\|A(x_i^1, \ldots, x_i^m)_{i=1}^k\|_{w,p} &= \sup\{\|\textstyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A(x_i^1, \ldots, x_i^m)\|;\ \|(\lambda_i)\|_{p'} \le 1\} \\
&\le \sup\{\|\textstyle\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^1 \ldots \sigma_i^m A(x_i^1, \ldots, x_i^m)\|;\ \|\sigma_i^1\|_{q_1'} \le 1, \ldots, \|\sigma_i^m\|_{q_m'} \le 1\} \\
&= \sup \|\{\textstyle\sum_{i=1}^{k} A(\sigma_i^1 x_i^1, \ldots, \sigma_i^m x_i^m)\|;\ \|\sigma_i^1\|_{w,q_1'} \le 1, \ldots, \|\sigma_i^m\|_{w,q_m'} \le 1\}
\end{aligned}$$

Usando agora as funções generalizadas de Rademacher teremos:

$\|A(x_i^1, \ldots, x_i^m)\|_{w,p} =$

$\sup\{\| \int_0^1 A(\sum \sigma_i^1 s_i(t) x_i^1, \ldots, \sum \sigma_i^m s_i(t) x_i^m)\, dt\|;\ \|\sigma_i^1\|_{q_1'} \le 1, \ldots, \|\sigma_i^m\|_{q_m'} \le 1\} \le$

$\sup\{\|A(\sum \sigma_i^1 s_i(t) x_i^1, \ldots, \sum \sigma_i^m s_i(t) x_i^m)\|;\ \|\sigma_i^1\|_{q_1'} \le 1, \ldots, \|\sigma_i^m\|_{q_m'},\ t \in [0,1]\} =$

$\sup\{\|A(\sum \sigma_i^1 x_i^1, \ldots, \sum_i^m x_i^m)\|;\ \|\sigma_i^1\|_{q_1'} \le 1, \ldots, \|\sigma_i^m\|_{q_m'} \le 1\} \le$

$\|A\| \sup\{\|\sum \sigma_i^1 x_i^1\|;\ \|\sigma_i^1\|_{q_1'} \le 1\} \ldots \sup\{\|\sum \sigma_i^m x_i^m\|;\ \|\sigma_i^m\|_{q_m'} \le 1\} = \|A\| \|x_i^1\|_{w,q_1} \ldots \|x_i^m\|_{w,q_m}.$

O exemplo abaixo prova que, para o caso geral, o resultado acima é o melhor possível.

Exemplo 2

Suponhamos $\sum_{i=1}^{m} 1/q_i' > 1/p'$. Façamos $\sum_{i=1}^{m} 1/q_i' = 1/q' > 1/p' \Rightarrow q > p$. Logo existe $a \in (l_{q'})' \setminus l_p$. Daí fazemos

$$\begin{array}{rcl} A : l_{q_1'} \text{ x } l_{q_2'} \text{ x } \ldots \text{ x } l_{q_m'} & \longrightarrow & l_{q'} \ (q' \geq 1) \\ (x_1, \ldots, x_m) & \longrightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} < x_1, e_n >< x_2, e_n > \ldots < x_m, e_n > e_n \end{array}$$

onde (e_n) é a base canônica de l_q

Notando que-ARRUMAR

$\|A(x_1, \ldots, x_m)\|_{q'} = (\sum_{n=1}^{\infty} | < x_1, e_n > \ldots < x_m, e_n > |^{q'})^{1/q'} \leq$

$\|(| < x_1, e_n > |)\|_{q_1'} \cdots \|(| < x_m, e_n > |)\|_{q_m'} = \|x_1^i\|_{q_1'} \cdots \|x_m^i\|_{q_m'}$ temos que $A \in L(l_{q_1'}, \ldots, l_{q_m'}; l_{q'})$.

Mas tomando $(e_j) \in l_{q_i}^w(l_{q_i'})$ vem

$\sum | < A(e_j, e_j, \ldots, e_j), a > |^p = \sum | < e_j, a > |^p = \infty$

Daí temos $(e_j) \in l_{q_i}^w(l_{q_i'})$ mas $(A(e_j, e_j, \ldots, e_j)) \notin l_p^w(l_{q'})$ e daí

$$L_{ws}^{(p,q_1,\ldots,q_m)}(l_{q_1'}, l_{q_2'}, \ldots, l_{q_m'}; l_{q'}) \neq L(l_{q_1'}, \ldots, l_{q_m'}; l_{q'})$$

Vale observar que este resultado nos diz, que para $1 \leq p = q_1 = \ldots = q_m$, o resultado só se torna verdadeiro se $p = q_1 = \ldots = q_m = 1$, e daí teremos que o teorema 57 obtido no início deste capitulo, no caso caso geral é o melhor possível, pois se fosse verdadeiro para algum $p > 1$, o mesmo seria verdadeiro para aplicações fracamente p somante, mas como todo operador linear é fracamente p somante, teríamos que toda aplicação multilinear seria fracamente p somante, o que contraria o exemplo acima.

Estamos agora em condições de provar o resultado abaixo.

Teorema 59

Seja $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ onde E_i, F são espaços de Banach complexos ou reais. Suponhamos $\{n_1, \ldots, n_r\} \cup \{m_1, \ldots, m_s\} = \{1, \ldots, n\}$ e que exista K tal que se $x_1 \in E_{n_1}, \ldots, x_r \in E_{n_r}$ a aplicação $A_{x_1,\ldots,x_r}$ definida como anteriormente, é $(s, 1, \ldots, 1)$ mista somante e além disso

$$\|A_{x_1,\ldots,x_r}\|_{m\ (s,1,\ldots,1)} \leq K\|x_1\|\ldots\|x_r\|.$$

Então A é $(s,1;1,\ldots,1)$ mista somante e além disso teremos

$$\|A\|_{m\ (s,1;1,\ldots,1)} \leq K$$

Demontração:

Mostremos que se $T \in L(F,Z)$ é s somante então TA é absolutamente somante.

Dados $x_1 \in E_{n_1},\ldots,x_r \in E_{n_r}$, teremos

$$TA_{x_1,\ldots,x_r} = (TA)_{x_1,\ldots,x_r}$$

e como $A_{x_1,\ldots,x_r}$ é $(s,1,\ldots,1)$ misto somante teremos $(TA)_{x_1,\ldots,x_r}$ absolutamente somante e além disso

$$\|TA_{x_1,\ldots,x_r}\|_{as} \leq \|A_{x_1,\ldots,x_r}\|_{m\,(s,1\ldots,1)} \leq K\|x_1\|\ldots\|x_r\|$$

Logo pelo teorema anterior TA é absolutamente somante e daí A é $(s,1,\ldots,1)$ misto somante e

$$\|A\|_{m\ (s,1,\ldots,1)} \leq K$$

A título de ilustrarmos algumas aplicações do teorema acima, lembremos que um espaço E tem cotipo q, se existe $C \geq 0$ tal que para quaisquer que sejam $x_1,\ldots,x_n \in E$ tivermos:

$$(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q)^{1/q} \leq C(\int_0^1 \|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\|^2\, dt)^{1/2}$$

Vale observar ainda:

(1)$1 \leq q \leq 2,\ l_q$ tem cotipo 2

(2)$2 \leq q < \infty, l_q$ tem cotipo q

(3)Se E tem cotipo 2, então $L^2_{as}(E,F) = L^1_{as}(E,F)$

(4)Se E tem cotipo $2 < q < \infty$, então $L^r_{as}(E,F) = L^1_{as}(E,F)\ \forall\ 1 < r < q'$

(5)Se E,F têm cotipo 2, então $L^r_{as}(E,F) = L^1_{as}(E,F)\ \forall\ 1 < r < \infty$

(6)Se E tem cotipo $2 \leq q < \infty$, então I_E é $(q,1)$ somante.

O teorema 54 nos leva às seguintes generalizações:

(3')Se E tem cotipo 2, então:

$$L_d^2({}^nE, F) = L_d^1({}^nE, F) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{P}_d^2({}^nE, F) = \mathcal{P}_d^1({}^nE, F) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(4') Se E tem cotipo $2 < q < \infty$, então:

$$L_d^r({}^nE, F) = L_d^1({}^nE, F) \ \ \forall \ 1 < r < q'$$

$$\mathcal{P}_d^r({}^nE, F) = \mathcal{P}_d^1({}^nE, F) \ \ \forall \ 1 < r < q'$$

(5')Se $E,\ F$ têm cotipo 2, então $L_d^r({}^nE, F) = L_d^1({}^nE, F) \ \ \forall \ 1 < r < \infty$

Vale ainda recordar, o seguinte resultado devido a Maurey.

Teorema 60[17]

Se E tem cotipo 2, então I_E é $(2, p)$ misto somante para todo $0 < p \leq 2$.

Em particular teremos

$$L_m^{(2,p)}(F, E) = L(F, E) \ \text{ e } \ L_m^{(2,p)} = L(E, F)$$

Proposição 61

Seja $A \in L(E_1, \ldots, E_k, l_2, E_{k+1}, \ldots, E_n; F)$. Então A é $(2, 1; 1, \ldots, 1)$ misto somante.

Demonstração:

Como l_2 tem cotipo 2, teremos I_{l_2} $(2, 1)$ misto somante e $L_{as}^{(2,1)}(l_2, F) = L(l_2, F)$. Logo existe K tal que $\forall \ T \in L(l_2, F)$ teremos

$$\|T\|_{m\,(2,1)} \leq K\|T\|$$

Daí dados $x_1 \in E_1, \ldots, x_k \in E_k, \ldots, x_n \in E_n$ definimos

$$\begin{aligned} A_{x_1,\ldots,x_n} \ : \ l_2 \ &\longrightarrow \ F \\ x \ &\longmapsto \ A(x_1, \ldots, x_k, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Daí vem

$$\|A_{x_1,\ldots,x_n}\|_{m\,(2,1)} \leq K\|x_1\|\ldots\|x_n\|$$

Logo pelo teorema anterior teremos A $(2,1)$ misto somante.

Uma generalização clara do teorema acima é dada pelo teorema seguinte.

<u>**Teorema 62**</u>

Seja $A \in L(E_1,\ldots,E_n)$ onde E_i é de cotipo 2 para algum i. Então A é $(2,1,\ldots,1)$ misto somante.

O método utilizado acima pode ainda ser empregado para provar o seguinte teorema.

<u>**Teorema 63**</u>

Se E, F são tais que $L(E,F) = L_m^{(s,1)}(E,F)$, então para todo $E_1,\ldots,E_n$ teremos

$$L(E_1,\ldots,E_{k-1},E,E_k\ldots,E_n;F) = L_m^{(s,1,\ldots,1)}(E_1,\ldots,E_{k-1},E,E_k,\ldots,E_n;F)$$

Para ilustrar como o resultado acima pode nos ser útil, mencionemos o seguinte teorema.

<u>**Teorema 64**</u>[5]

Sejam $1 \leq q \leq \infty$ e $0 < p \leq 2 \leq s \leq \infty$ tal que $1/s = |1/2 - 1/q|$. Então

$$L(l_1,l_q) = L_m^{(s,p)}(l_1,l_q)$$

<u>**Corolário 65(dos 2 últimos teoremas)**</u>

Sejam $1 \leq q \leq \infty$ e $1/s = |1/2 - 1/q|$ então:

$$L(E_1,\ldots,E_{k-1},l_1,E_k,\ldots,E_n,l_q) = L_m^{(s,1,\ldots,1)}(E_1,\ldots,E_{k-1},l_1,E_k,\ldots,E_n,l_q)$$

O teorema acima, e consequentemente o corolário, pode ser generalizado para aplicações entre espaços $\mathcal{L}_{1,\lambda}$ e $\mathcal{L}_{q,\mu}$, isto é, temos o teorema:

Teorema 66

Sejam $1 \leq q \leq \infty$ e $0 < p \leq 2 \leq s \leq \infty$ tal que $1/s = |1/2 - 1/q|$. Então se X é um espaço $\mathcal{L}_{1,\lambda}$ e Y um espaço $\mathcal{L}_{q,\mu}$ teremos

$$L(X,Y) = L_m^{(s,p)}(X,Y)$$

Demonstração:

Sendo $x_1, \ldots, x_k \in X$, existem E subespaço de dimensão n de X com $span[x_1, \ldots, x_k] \subset E$ e $v \in L(E, l_1^n)$ com $\|v\|\|v^{-1}\| \leq \lambda$. Teremos então $T(E) \subset F$, subespaço de dimensão N de Y e w com $w \in L(F, l_q^N)$, $\|w\|\|w^{-1}\| \leq \mu$. Se T_0 é o operador induzido por T sobre E teremos:

$$E \xrightarrow{v} l_1^n \xrightarrow{v^{-1}} E \xrightarrow{T_0} F \xrightarrow{w} l_q^N \xrightarrow{w^{-1}} F$$

Dados agora $b_1, \ldots, b_m \in Y'$ teremos:

$(\sum_{i=1}^k (\sum_{j=1}^m | < b_j, Tx_i > |^s)^{p/s})^{1/p} = (\sum_{i=1}^k (\sum_{j=1}^m | < b_j, w^{-1} w T_0 v^{-1} v x_i > |^s)^{p/s})^{1/p} =$
$\|w^{-1}\| (\sum_{i=1}^k (\sum_{j=1}^m | < b_j w^{-1} / \|w^{-1}\|, w T_0 v^{-1} v x_i > |^s)^{p/s})^{1/p} \leq$
$\|w^{-1}\| \|w T_0 v^{-1}\|_{m\,(s,p)} \|(b_j w^{-1} / \|w^{-1}\|)\|_s \|(v x_i)\|_{w,p} \leq \|w^{-1}\| K \|w T_0 v^{-1}\| \|v\| \|(x_i)\|_{w,p} \|(b_j)\|_s \leq$
$K \|T\| \lambda \mu \|(b_j)\|_s \|(x_i)\|_{w,p}$, onde a constante K vem do caso anterior. Logo T é (s,p) misto somante e além disso

$$\|T\|_{m\,(s,p)} \leq K \|T\| \lambda \mu$$

Corolário 67

Sejam $1 \leq q \leq \infty$ e $1/s = |1/2 - 1/q|$. Então se X é um espaço $\mathcal{L}_{1,\lambda}$ e Y é um espaço $\mathcal{L}_{q,\mu}$ teremos:

$$L(E_1, \ldots, E_k, X, E_{k+1}, \ldots, E_n; Y) = L_m^{(s,1,\ldots,1)}(E_1, \ldots, E_k, X, E_{k+1}, \ldots, E_n; Y)$$

Em particular

$$\mathcal{P}(^n l_1, l_1) = \mathcal{P}_m^{(2,1)}(^n l_1, l_1) \;\; e \;\; \mathcal{P}(^n l_1, l_\infty) = \mathcal{P}_m^{(2,1)}(^n l_1, l_\infty)$$

A proposição a seguir, embora de fácil demonstração, nos será muito útil.

Proposição 68

(1) Se $A \in L_{ws}^{(p,p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $T \in L_m^{(s,p)}(F,Z)$ então $TA \in L_m^{(s,p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;Z)$

(2) Se $P \in \mathcal{P}_w^{(p,p_1)}({}^nE,F)$ e $T \in L_m^{(s,p)}(F,Z)$, então $TP \in \mathcal{P}_m^{(s,p,p_1)}({}^nE,Z)$

(3)Se $T \in L_m^{(s,p)}$ e $P \in \mathcal{P}_{ws}^{s}(F,Z)$, então $PT \in L_m^{(s,p)}({}^nE,F)$

Demonstração:

(1) Dados $x_1^i,\ldots,x_1^k \in E_1,\ldots,x_n^1,\ldots,x_n^k \in E_n$ teremos

$$\|(TA(x_1^i,\ldots,x_n^i))_{i=1}^k\|_{m,(s,p)} \leq \|T\|_{m\,(s,p)}\|(A(x_1^i,\ldots,x_n^i))_{i=1}^k\|_{w,p} \leq$$

$$\|T\|_{m\,(s,p)}\|A\|_{ws,(p,p_1,\ldots,p_n)}\|x_1^i\|_{w,p_1}\cdots\|x_n^i\|_{w,p_n}$$

(2) e (3) são análogas.

Em face da proposição acima temos o seguinte teorema.

Teorema 69

(i) Se F tem cotipo 2 e $0 < p \leq 2$, então

$$L_{ws}^{(p;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;F) = L_m^{(2,p;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$$

(ii)Teremos ainda

$$\mathcal{P}_{ws}^{(p,p_1)}({}^nE,F) = \mathcal{P}_m^{(2;p,p_1)}({}^nE,F)$$

7-Ultraestabilidade

O objetivo do presente capítulo, é ilustrar uma técnica muito eficaz para estender polinômios dos tipos estudado anteriormente.

Inicialmente, seja $(E_i)_{i\in I}$ uma família de espaços de Banach e $\mathcal{U}$ um ultrafiltro sobre I.

Sejam ainda

$$l_\infty(E_i) = \{(x_i)_{i\in I};\ \sup \|x_i\| < \infty\}$$

e

$$N_\mathcal{U} = \{(x_i)_{i\in I};\ \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0\}$$

Definiremos, então

$$\boldsymbol{(E_i)_\mathcal{U} = \frac{l_\infty(E_i)}{N_\mathcal{U}}}$$

Dada $(x_i)_{i\in I} \in l_\infty(E_i)$, sua classe será anotada por $(x_i)_\mathcal{U}$, valendo ainda mencionar que

$$\|(x_i)_\mathcal{U}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|$$

A proposição abaixo, apesar de muito simples, nos é de grande interesse.

Proposição 70

Seja E espaço de Banach e $\mathcal{U}$ ultrafiltro. Então $E \hookrightarrow (E)_\mathcal{U}$.

Demonstração:

Basta definir

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow (E)_\mathcal{U} \\ x &\longmapsto (x_i)_\mathcal{U} \end{aligned}$$

onde $x_i = x$ para todo i

Observação

Vale mencionar que $(\mathbb{K})_\mathcal{U} = \mathbb{K}$ e mais geralmente se $dimE = n < \infty$ então $dim(E)_\mathcal{U} = n$.

Não nos ocuparemos da teoria de ultraprodutos, valendo dizer que as referências básicas sobre o assunto são Heinrich[10] e Diestel[7].

Estamos agora em condições, de estender a noção de ultraprodutos de operadores lineares, para aplicações multilineares, cujo estudo pode ser encontrado em [12].

Dado um conjunto de índices I, para cada i $\in$ I, consideremos espaços de Banach $E_i^1, \ldots, E_i^n, F_i$ e $A_i \in L(E_i^1 \ldots, E_i^n; F_i)$ com $\sup \|A_i\| < \infty$ e $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre I. Definiremos então

$$(A_i)_{\mathcal{U}} : (E_i^1)_{\mathcal{U}} \mathrm{x} \cdots \mathrm{x} (E_i^n)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (F_i)_{\mathcal{U}}$$

onde

$$(A_i)_{\mathcal{U}}((x_i^1)_{\mathcal{U}}, \ldots, (x_i^n)_{\mathcal{U}}) = (A_i(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{\mathcal{U}}$$

Temos inicialmente, a seguinte proposição.

Proposição 71

Sejam $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ simétrica e $\mathcal{U}$ ultrafiltro. Então $(A)_{\mathcal{U}}$ definida como acima é simétrica e além disso teremos

$$\|(A)_{\mathcal{U}}\| = \|A\|$$

Demonstração:

$$\|(A)_{\mathcal{U}}\| = \sup\{\|(A)_{\mathcal{U}}((x_i^1)_{\mathcal{U}}, \ldots, (x_i^n)_{\mathcal{U}})\|; \ \|(x_i^1)_{\mathcal{U}}\|, \ldots, \|(x_i^n)_{\mathcal{U}}\| \leq 1\} =$$

$$= \sup \|(A(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{\mathcal{U}}\| = \sup \lim_{\mathcal{U}} \|A(x_i^1, \ldots, x_i^n)\| \leq \sup \lim_{\mathcal{U}} \|A\| = \|A\|$$

Como temos $E_j \hookrightarrow (E_i)_{\mathcal{U}}$, teremos ainda $\|(A)_{\mathcal{U}}\| \geq \|A\|$ e daí segue o resultado.

Dados $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ e $\mathcal{U}$ ultrafiltro definiremos

$$(P)_{\mathcal{U}} :^n (E)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (F)_{\mathcal{U}}$$

por

$$(P)_{\mathcal{U}}((x_i)_{\mathcal{U}}) = (Px_i)_{\mathcal{U}}$$

Proposição 72

Sejam $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e $\mathcal{U}$ ultrafiltro. Então $(P)_{\mathcal{U}}$ definido como acima, é tal que $(P)_{\mathcal{U}} \in \mathcal{P}(^n(E)_{\mathcal{U}}, (F)_{\mathcal{U}})$ e além disso

$$(\check{P})_{\mathcal{U}} = ((P)_{\mathcal{U}})\check{} \quad \text{e} \quad \|(P)_{\mathcal{U}}\| = \|P\|$$

Demonstração:

Basta notar que

$$(\check{P})_{\mathcal{U}}((x_i)_{\mathcal{U}}, \ldots, (x_i)_{\mathcal{U}}) = (\check{P}(x_i, \ldots, x_i))_{\mathcal{U}} = (P(x_i))_{\mathcal{U}} = (P)_{\mathcal{U}}(x_i)_{\mathcal{U}}$$

A igualdade entre as normas é de fácil verificação, tal como foi feito para n-lineares anteriormente.

O importante teorema abaixo pode ser encontrado em Heinrich[10].

Teorema 73

Sejam $(E_i)_{i\in I}$ família de espaços de Banach e $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre I. Para cada $M \subset (E_i)'_{\mathcal{U}}$ de dimensão finita, cada conjunto finito $\{x^1, \ldots, x^n\} \subset (E_i)_{\mathcal{U}}$ e cada $\epsilon > 0$, existe $T : M \longrightarrow (E'_i)_{\mathcal{U}}$ com T isomorfismo sobre sua imagem, $\|T\|$ e $\|T^{-1}\| \leq 1 + \epsilon$ e além disso

$$< Tg, x^k > = < g, x^k > \text{ para todo } g \in M \text{ e } k = 1, 2, \ldots, n$$

Estamos agora em condições de retornarmos ao problema inicial, qual seja a extensão de polinômios.

Teorema 74

Sejam $A_i : E_i^1 \text{x} \cdots \text{x} E_i^n \longrightarrow F_i$, $i \in I$, $(q;p_1, \ldots, p_n)$ somante com $C = \sup \|A_i\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)} < \infty$. Então $(A_i)_{\mathcal{U}} : (E_i^1)_{\mathcal{U}} \text{x} \cdots \text{x} (E_i^n)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (F_i)_{\mathcal{U}}$ definida como anteriormente é $(q;p_1, \ldots, p_n)$ somante e além disso

$$\|(A_i)_{\mathcal{U}}\|_{as,(q;p_1,\ldots,p_n)} \leq C$$

Demonstração:

Dados $(x_{i1}^1)_\mathcal{U},\ldots,(x_{i1}^k)_\mathcal{U}\in(E_i^1)_\mathcal{U},\ldots,(x_{in}^1)_\mathcal{U},\ldots,(x_{in}^k)_\mathcal{U}\in(E_i^n)_\mathcal{U}$ teremos

$(\sum_{j=1}^k \|A_i(x_{i1}^j,\ldots,x_{in}^j)\|^q)^{1/q}\le$

$C\sup_{a_{i1}\in B_{(E_i^1)'}}\{(\sum|<a_{i1},x_{i1}^j>|^{p_1})^{1/p_1}\}\ldots\sup_{a_{in}\in B_{(E_i^n)'}}\{\sum<a_{in},x_{in}^j>|^{p_n})^{1/p_n}\}$

e daí vem

$$(\sum_{j=1}^k\|(A_i)_\mathcal{U}((x_{i1}^j)_\mathcal{U},\ldots,(x_{in}^j)_\mathcal{U})\|^q)^{1/q}\le C\prod_{m=1}^n\sup_{a_{im}\in B_{(E_i^m)'}}\{(\sum|<(x_{im}^j)_\mathcal{U},(a_{im})_\mathcal{U}>|^{p_m})^{1/p_m}\}\le$$

$$\le C\prod_{m=1}^n\|((x_{ij}^m)_\mathcal{U})_{j=1}^k\|_{w,p_m}$$

<u>**Teorema 75**</u>

Sejam $A_i\in L(E_i^1,\ldots,E_i^n;F_i)$, $i\in I$, $(q;p_1,\ldots,p_n)$ fracamente somante com $C=\sup\|A_i\|_{ws,(q;p_1,\ldots,p_n)}<\infty$. Então $(A_i)_\mathcal{U}\in L((E_i^1)_\mathcal{U},\ldots,(E_i^n)_\mathcal{U};(F_i)_\mathcal{U})$ definida como anteriormente é $(q;p_1,\ldots,p_n)$ fracamente somante e além disso

$$\|(A_i)_\mathcal{U}\|_{ws,(q;p_1,\ldots,p_n)}\le C$$

Demonstração:

Dados $(x_{i1}^1)_\mathcal{U},\ldots,(x_{i1}^k)_\mathcal{U}\in(E_i^1)_\mathcal{U},\ldots,(x_{in}^1)_\mathcal{U},\ldots,(x_{in}^k)_\mathcal{U}\in(E_i^n)_\mathcal{U}$ e $\varphi_i\in B_{F_i'}$ teremos

$$(\sum_{j=1}^k|<\varphi_i,A_i(x_{i1}^j,\ldots,x_{in}^j)>|^q)^{1/q}\le C\prod_{m=1}^n\sup_{a_{im}\in B_{E_i^{m\prime}}}\{(\sum|<a_{im},x_{im}^j>|^{p_m})^{1/p_m}\}$$

logo

$$(\sum_{j=1}^k|<(\varphi_i(A_i(x_{i1}^j,\ldots,x_{in}^j)))_\mathcal{U}>|^q)^{1/q}\le C\prod_{m=1}^n\sup\{\sum|<(x_{im}^j)_\mathcal{U},(a_{im})_\mathcal{U}>|^{p_1})^{1/p_1}\}\le$$

$$\le C\prod_{m=1}^n\|(x_{im}^j)_\mathcal{U}\|_{w,p_m}$$

Mas dado $a\in B_{(F_i)_\mathcal{U}'}$ e $\epsilon>0$, usamos o teorema 75 para obter T tal que $\|Ta\|\le(1+\epsilon)\|a\|\le 1+\epsilon$ e daí vem

$$(\sum_{j=1}^{k} | < a, (A_i)_{\mathcal{U}}((x_{i1}^j)_{\mathcal{U}}, \ldots, (x_{in}^j)_{\mathcal{U}}) > |^q)^{1/q} =$$

$$(1+\epsilon)(\sum_{j=1}^{k} | < T(\frac{a}{1+\epsilon}), (A_i)_{\mathcal{U}}((x_{i1}^j)_{\mathcal{U}}, \ldots, (x_{in}^j)_{\mathcal{U}}) > |^q)^{1/q} = *$$

e como $T(\frac{a}{1+\epsilon}) \in (F_i')_{\mathcal{U}}$ teremos $T(\frac{a}{1+\epsilon}) = (\varphi_i)_{\mathcal{U}}$ onde $\lim_{\mathcal{U}} \|\varphi_i\| \leq 1$ e $\varphi_i \in F_i'$. Logo

$$* = (1+\epsilon)(\sum_{j=1}^{k} | < (\varphi_i)_{\mathcal{U}}, (A_i)_{\mathcal{U}}((x_{i1}^j)_{\mathcal{U}}, \ldots, (x_{in}^j)_{\mathcal{U}}) > |^q)^{1/q} =$$

$$(1+\epsilon)(\sum_{j=1}^{k} |(\varphi_i(A_i(x_{i1}^j, \ldots, x_{in}^j)))_{\mathcal{U}} > |^q)^{1/q}$$

o que juntamente com a desigualdade acima nos leva ao resultado.

De maneira análoga, através do teorema 74 poderíamos provar o teorema abaixo.

Teorema 76

Sejam $A_i \in L(E_i^1, \ldots, E_i^n; F_i)$, $i \in I$, $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ misto somantes com $C = \sup \|A_i\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)} < \infty$. Então $(A_i)_{\mathcal{U}} \in L((E_i^1)_{\mathcal{U}}, \ldots, (E_i^n)_{\mathcal{U}}; (F_i)_{\mathcal{U}})$ definida como anteriormente é $(s, q; p_1, \ldots, p_n)$ misto somante e além disso

$$\|(A_i)_{\mathcal{U}}\|_{m,(s,q;p_1,\ldots,p_n)} \leq C$$

Vale aqui mencionar o seguinte teorema , que pode ser encontrado em [10].

Teorema 77

F é finitamente representável em E, se e somente se, existe um ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $F \hookrightarrow (E)_{\mathcal{U}}$

O teorema acima, juntamente com os três anteriores, nos levam ao teorema.

Teorema 78

Sejam F finitamente representável em E e $P \in \mathcal{P}(^nE, \mathbb{K})$. Se P é (q;p) somante, (q;p) fracamente somante ou (s,q;p) misto somante, então existe $\tilde{P} \in \mathcal{P}(^nF, \mathbb{K})$ respectivamente (q;p) somante, (q;p) fracamente somante ou (s,q;p) misto somante tal que

$$\tilde{P}|_E = P$$

Demontração:

Sendo F finitamente representável em E, pelo teorema acima, existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro tal que $F \hookrightarrow (E)_{\mathcal{U}}$ e então tomando $\tilde{P} = (P)_{\mathcal{U}}$ restrito a F, temos o resultado.

Corolário 79

Se $P \in \mathcal{P}(^nE; \mathbb{K})$ é de um dos tipos acima, como no teorema anterior, então existe $\tilde{P} \in \mathcal{P}(^nE''; \mathbb{K})$ do mesmo tipo tal que

$$\tilde{P}|_E = P$$

Demonstração :

Basta lembrar que E'' é finitamente representável em E.

8-Aplicações Localmente Misto Somantes

Estamos agora interessados, em estender o conceito introduzido por Matos em [16] para aplicações misto somantes. Para tanto, inicialmente recordemos a seguinte definição.

Definição

Sejam E, F espaços de Banach, $f : V \subset E \longrightarrow F$, V aberto em E e $a \in V$. f será dita **absolutamente p somante** em a se $(f(a+x_i) - f(a))_{i\in\mathbb{N}} \in l_p(F)$ sempre que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(E)$ com $a + x_i \in V$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Doravante E e F serão sempre espaços de Banach, valendo ressaltar ainda que para $p > 0$ teremos

$$l_p^u(E) = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^w(E);\ \lim_{m\to\infty} \|(x_i)_{i=m}^{\infty}\|_{w,p} = 0\}$$

Teorema 80

Seja $f : V \subset E \longrightarrow F$ e $a \in V$. São equivalentes:

(1)Existe δ; tal que para quaisquer n e $x_1, \ldots, x_n \in E$, com $a + x_i \in V$ e $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$ teremos

$\|(f(a+x_i) - f(a))_{i=1}^n\|_p \leq 1$

(2)Existem C e δ tal que para quaisquer n e $x_1, \ldots, x_n \in E$ com $a+x_i \in V$ e $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$ teremos $\|(f(a+x_i) - f(a))_{i=1}^n\|_p \leq C$

(3)f é absolutamente p somante em a

(4)Dado $\epsilon > 0$, existe δ tal que para quaisquer n e $x_1, \ldots, x_n \in E$ com $a + x_i \in V$ e $\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_{w,p} \leq \delta$ teremos $\|(f(a+x_i) - f(a))_{i=1}^n\|_p \leq \epsilon$

Não nos preocuparemos em demonstrar o teorema acima, pois a demonstração é análoga à demonstração a ser feita para aplicações misto somantes um pouco à frente.

Observação

$\mathcal{P}_{as,a}^p({}^nE, F)$ indica o conjunto dos polinômios $P \in \mathcal{P}({}^nE; F)$ que são p absolutamente somantes em a . É claro que

$$\mathcal{P}_{as,0}^p({}^nE, F) = \mathcal{P}_{as}^p({}^nE, F)$$

Matos em [16] mostra que existem exemplos onde

$$\mathcal{P}_{as}^{p}({}^{n}E;F) \neq \mathcal{P}_{as,a}^{p}({}^{n}E;F)$$

Definição

Sejam $f : V \subset E \longrightarrow F$, $a \in V$ e $0 < p < s \leq \infty$. f será dita **(s,p) misto somante** em a se $(f(a+x_i)-f(a))_{i\in\mathbb{N}} \in l_{(s,p)}^{m}(F)$ sempre que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(E)$, com $a+x_i \in V$, $i \in \mathbb{N}$.

Fixados E, F e $V \subset E$ aberto e $a \in V$, indicaremos por $\mathcal{M}_a^{(s,p)}(V;F)$ o conjunto das funções $f : V \to F$ que são (s,p) misto somantes em a. Definiremos ainda

$$\mathcal{P}_{m,a}^{(s,p)}({}^{n}E;F) \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in \mathcal{P}({}^{n}E;F);\ P \text{ é } (s,p) \text{ misto somante em } a\}$$

$$L_{m,a}^{(s,p)}(E;F) = \{T \in L(E;F);\ T \text{ é } (s,p) \text{ misto somante em } a\}$$

Análogamente anotaremos $\Pi_a^p(V;F)$ para o conjunto das funções $f : V \to F$ que são p somantes em a.

Doravante, estaremos interessados em caracterizar, tal como foi feito para polinômios as aplicações (s,p) misto somantes em a.

Inicialmente recordemos que $(f(a+x_i) - f(a))_{i\in\mathbb{N}} \in l_{(s,p)}^{m}(E)$ se e somente se

$$\left(\int_{B_{E'}} |< b, f(a+x_i) - f(a) >|^s \, d\mu(b)\right)^{1/s} \in l_p(E) \text{ quando } \mu \in W(B_{E'}).$$

Neste caso teremos

$$\|(f(a+x_i) - f(a))\|_{m,(s,p)} = \sup_{\mu\in W(B_{E'})} \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\int_{B_{E'}} |< b, f(a+x_i) - f(a) >|^s \, d\mu(b)\right)^{p/s}\right)^{1/p}$$

Provemos agora o seguinte lema.

Lema 81

Se $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^m_{(s;p)}(E)$ com $s > p$ então

$$\lim_{k\to\infty} \|(x_i)_{i\geq k}\|_{m,(s,p)} = 0$$

Demonstração:

Se $\|(x_i)\|_{m,(s,p)} = 0$ nada temos a demonstrar. Caso contrário existem $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_r$ $(1/r + 1/s = 1/p)$ e $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^w_s(E)$ tal que

$$x_i = \tau_i y_i$$

Dado $\epsilon > 0$, tomamos n_0 tal que

$$\|(\tau_i)_{i\geq n_0}\|_r \leq \frac{\epsilon}{\|y_i\|_{w,s}}$$

e daí se $n \geq n_0$ teremos

$$\|(x_i)_{i\geq n}\|_{m,(s,p)} \leq \|(\tau_i)_{i\geq n}\|_r \|(y_i)_{i\geq n}\|_{w,p} \leq \|(\tau_i)_{i\geq n_0}\|_r \|(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_{w,p} \leq \epsilon$$

No que se segue, estaremos sempre supondo $s > p$.

Teorema 82

Sejam $f : V \subset E \longrightarrow F$ e $a \in V$. São equivalentes:

(i)Existe δ tal que para todo n e $x_1, \ldots, x_n \in E$ com $a + x_i \in V$e $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$ teremos $\|((f(a + x_i) - f(a))_{i=1}^n\|_{m,(s,p)} \leq 1$

(ii)Existem C e δ tal que para todo n e $x_1, \ldots, x_n \in E$ com $a + x_i \in V$ e $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$ teremos $\|((f(a + x_i) - f(a))_{i=1}^n\|_{m,(s,p)} \leq C$

(iii)f é (s,p) misto somante em a

(iv)dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo n e $x_1, \ldots, x_n$ com $a + x_i \in V$ e $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$ teremos $\|((f(a + x_i) - f(a))_{i=1}^n\|_{m,(s,p)} \leq \epsilon$

Demonstração:

(i)$\Rightarrow$ (ii) óbvio

(ii)$\Rightarrow$ (iii)

Seja $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(E)$, então existe n_0 tal que $\|(x_i)_{i\geq n_0}\|_{w,p} \leq \delta$ e daí teremos

$\|(f(a+x_i)-f(a))_{i\geq n_0}\|_{m,(s,p)} \leq C$ e consequentemente $\|((f(a+x_i)-f(a))_{i\in\mathbb{N}}\|_{m,(s,p)} < \infty$

(iii)$\Rightarrow$(iv)

Suponhamos existir $\epsilon > 0$ tal que $\forall\ k$ existem n_k e $x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k$ tal que

$$\|(x_j^k)_{j=1}^{n_k}\|_{w,p} < 1/2^k \text{ mas } \|((f(a+x_j^k) - f(a))_{j=1}^{n_k}\|_{m,(s,p)} \geq \epsilon$$

Então a seqüência $x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots$ está em $l_p^u(E)$, mas usando o lema anterior vemos que $\|(f(a+x_i) - f(a))_{i\in\mathbb{N}}\|_{m,(s,p)} = \infty$

(iv) $\Rightarrow$(i) óbvio.

Como consequência direta do ítem (iv) acima, obtemos o próximo corolário.

Corolário 83

Se f é (s,p) misto em a, então f é continua em a.

Teorema 84

Seja $f : V \subset E \longrightarrow F$ e $0 < p < s < \infty$. São equivalentes:

(i)Existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer n e $x_1, \ldots, x_n \in E$ com $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$, $a + x_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$ e quaisquer m e $b_1, \ldots, b_m \in F'$ teremos

$$(\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^m | < b_j, f(a+x_i) - f(a) > |^s)^{p/s})^{1/p} \leq \|(b_j)_{j=1}^m\|_s$$

(ii)Existem $C \geq 0$ e $\delta > 0$ tal que para quaisquer n e $x_1, \ldots, x_n \in E$, $a + x_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$ e quaisquer m e $b_1, \ldots, b_m \in F'$ com $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$ teremos

$$(\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^m | < b_j, f(a+x_i) - f(a) > |^s)^{p/s})^{1/p} \leq C\|(b_j)_{j=1}^m\|_s$$

(iii) f é (s,p) misto somante em a

(iv)Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer n e $x_1, \ldots, x_n \in E$, $a + x_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$ e quaisquer m e $b_1, \ldots, b_m \in F'$ com $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$ teremos

$$(\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^m | < b_j, f(a+x_i) - f(a) > |^s)^{p/s})^{1/p} \leq \epsilon\|(b_j)_{j=1}^m\|_s$$

Demonstração:

(i)$\Rightarrow$(ii)óbvio (ii)$\Rightarrow$ (iii)

Sejam $x_1, \ldots, x_n \in E$ com $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$ e $a + x_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$. Tomando $\nu = \sum_{k=1}^m \nu_k \delta_{b_k}$ medida de probabilidade discreta, onde δ_{b_k} é a medida de Dirac concentrada em $b_k \in B_{F'}$ teremos:

$(\sum_{i=1}^n (\int_{B_{F'}} | < b, f(a + x_i) - f(a) > |^s \, d\nu(b))^{p/s})^{1/p} =$

$(\sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^m | < \nu_k^{1/s} b_k, f(a+x_i) - f(a) > |^s)^{p/s})^{1/p} \leq C \|(\nu_k^{1/s} b_k)_{k=1}^m\|_s \leq C$. Por um argumento de densidade, já utilizado no teorema 35, teremos a desigualdade acima verificada para toda $\mu \in W(B_{F'})$. Daí

$$\|(f(a + x_i) - f(a))_{i=1}^n\|_{m,(s,p)} \leq C,$$

o que pelo teorema anterior ítem (ii), nos leva a concluir que f é (s, p) misto somante em a.

(iii)$\Rightarrow$ (iv) Dado $\epsilon > 0$ tomamos $\delta > 0$ tal como no ítem (iv) do teorema anterior e dados $b_1, \ldots, b_m \in F'$ definimos $\nu = \sum_{k=1}^m \nu_j \delta_j$ onde $\nu_j = \frac{\|b_j\|^s}{\sum_{i=1}^m \|b_j\|^s}$ onde δ_j é a medida de Dirac no ponto $\frac{b_j}{\|b_j\|}$. Daí teremos:

$$(\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m | < b_j, f(a + x_i) - f(a) > |^s)^{p/s})^{1/p} =$$
$$(\sum_{i=1}^n (\int_{B_{F'}} | < b, f(a + x_i) - f(a) > |^s \, d\nu(b))^{p/s})^{1/p} \|b_j\|_s \leq \epsilon \|b_j\|_s$$

(iv)$\Rightarrow$(i)óbvio.

Observação

(i) É claro que $\mathcal{P}_{m,0}^{(s,p)}(^n E, F) = \mathcal{P}_m^{(s,p)}(^n E, F)$

(ii)Se T é linear, então

$$T \in L_m^{(s,p)}(E, F) \Longleftrightarrow T \in L_{m,0}^{(s,p)}(E, F) \Longleftrightarrow T \in L_{m,a}^{(s,p)}(E, F) \; \forall \; a \in E$$

Doravante,usaremos a notação:

$$\mathcal{M}^{(s,p)}(V; F) = \{f : V \longrightarrow F; \text{ tal que } f \text{ é (s,p) misto somante em cada ponto } a \text{ de } V\}$$

Existem aplicações que não são p absolutamente somantes, mas que para algum s são (s, p) misto somantes. Um exemplo muito ilustrativo é o seguinte:

Exemplo 3

Suponhamos E de dimensão infinita e $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$. Definiremos então $P \in \mathcal{P}(^2E, E)$, por

$$P(x) = \varphi(x)x, \quad \forall\, x \in E$$

Teremos:

$$P(a + x_i) - P(a) = \varphi(a + x_i)(a + x_i) - \varphi(a)a = \varphi(x_i)a + \varphi(a)x_i + P(x_i)$$

Logo se $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(E)$ teremos $P(x_i)$ e $\varphi(x_i)a \in l_{(s,p)}^m$ e

$$(P(a + x_i) - P(a))_{i\in\mathbb{N}} \in l_{(s,p)}^m(E) \Longleftrightarrow (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{(s,p)}^m(E)$$

Logo se $a \in Ker\varphi$ teremos $P \in \mathcal{P}_{m,a}^{(s,p)}$. Se $a \notin Ker\varphi$ então

$$P \in \mathcal{P}_{m,a}^{(s,p)} \Longleftrightarrow I_E \text{ é (s,p) misto somante.}$$

Daí temos a proposição.

Proposição 85

Se E tem cotipo 2, então P dado da forma acima $\in \mathcal{M}^{(2,p)}(E; F)$ para qualquer $0 < p \leq 2$.

Proposição 86

Se $f : V \longrightarrow F$ é (s,p) misto somante em $a \in V$, então para cada $T \in L(F, Z)$ teremos $Tf : V \longrightarrow Z$ (s,p) misto somante em a.

Demonstração:

Basta notar que $\|(Tf(a + x_i) - Tf(a))_{i\in\mathbb{N}}\|_{m,(s,p)} \leq \|T\| \|(f(a + x_i) - f(a))_{i\in\mathbb{N}}\|_{m,(s,p)}$

Teorema 87

Sejam $f : V \longrightarrow F$ e $a \in V$. Se para todo Z e $T \in L_{as}^s(F, Z)$, Tf é p absolutamente somante em a, então existem $\delta > 0$ e $C \geq 0$ tais que para todo T com $\|T\|_{as,s} \leq 1$, e quaisquer $n, x_1, \ldots, x_n$ com $a + x_i \in V$ e $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$ teremos

$$\|(Tf(a + x_i) - Tf(a))_{i=1}^n\|_p \leq C$$

Demontração:

Se assim não fosse, dado k existiriam Z_k, $T_k : F \longrightarrow Z_k$, $x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k$ tais que $a + x_i^k \in V$, $i = 1, 2, \ldots, n_k$ $\|(x_i^k)_{i=1}^{n_k}\|_{w,p} \leq \frac{1}{2^{k/p}}$, $\|T\|_{as,s} \leq 1/2^k$ mas

$$\|(T_k f(a + x_i^k) - T_k f(a))_{i=1}^{n_k}\|_p > k$$

Como na prova do teorema 36 podemos definir $T = \sum_{k=1}^{\infty} J_k T_k$ e T será s absolutamente somante e além disso

$$k < \|(T_k f(a+x_i^k) - T_k f(a))_{i=1}^{n_k}\|_p = \|(Q_k T f(a+x_i^k) - Q_k T f(a))_{i=1}^{n_k}\|_p \leq \|(T f(a+x_i^k) - T f(a))_{i=1}^{n_k}\|_p$$

E daí, Tf não seria p absolutamente somante.

Proposição 88

Seja $f : V \longrightarrow F$ (s,p) misto somante em $a \in V$. Então se $T \in L(F, Z)$ é s absolutamente somante, teremos Tf p absolutamente somante em a.

Demonstração:

Como f é (s,p) misto somante existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n$ com $a + x_i \in V$, $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$ teremos $\|(f(a + x_i) - f(a))_{i=1}^n\|_{m,(s,p)} \leq 1$. Então podemos escrever

$$f(a + x_i) - f(a) = \tau_i y_i, \quad \|\tau_i\|_r \|y_i\|_{w,s} \leq 2$$

e daí vem:

$$\|Tf(a + x_i) - Tf(a)\|_p = \|\tau_i T y_i\|_p \leq \|\tau_i\|_r \|T y_i\|_s \leq \|\tau_i\|_r \|T\|_{as,s} \|y_i\|_{w,s} \leq 2\|T\|_{as,s}$$

Logo se $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq \delta$, teremos

$$\|Tf(a + x_i) - Tf(a)\|_p \leq 2\|T\|_{as,s} \text{ e portanto } Tf \text{ é } p \text{ somante em } a$$

Estamos agora, em condições de provar uma caracterização análoga ao teorema 45 para aplicações localmente (s,p) misto somante.

Teorema 89

Sejam $s \geq 1$ e $f : V \longrightarrow F$. Então f será (s,p) misto somante em $a \in V$ se, e somente se, Tf for p absolutamente somante em a para quaisquer espaço de Banach Z e

$T : F \longrightarrow Z$, s somante.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Proposição acima.

($\Leftarrow$) Dados $b_1, \ldots, b_m \in F'$definimos

$$\begin{array}{rcl} T : F & \longrightarrow & l_s^n \\ y & \longmapsto & (< y, b_k >) \end{array}$$

Claramente temos $\|T\|_{as,s} \leq \|(b_j)_{j=1}^m\|_s$ e daí, pelo teorema anterior, existem δ, C tal que $\forall\, n$, $x_1, \ldots, x_n$ com $\|x_i\|_{w,p} \leq \delta$ teremos $\|T/\|(b_j)_{j=1}^m\|_s f(a + x_i) - T/\|(b_j)_{j=1}^m\|_s f(a)\|_p \leq C$ ou $\|Tf(a + x_i) - Tf(a)\|_p \leq C\|(b_j)_{j=1}^m\|_s$ e daí vem

$$(\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} |< b_j, f(a+x_i) - f(a) > |^s)^{p/s})^{1/p} = (\sum_{i=1}^{n} \|Tf(a+x_i) - Tf(a)\|_s^p)^{1/p} \leq C\|(b_j)_{j=1}^m\|_s$$

e daí segue o resultado.

O teorema acima é de grande utilidade, pois nos permite várias conclusões a partir de resultados conhecidos para aplicações p somantes, tal como foi feito no capítulo anterior. Para ilustrarmos, enunciemos um resultado que pode ser encontrado em Matos[16].

Proposição 90

Se $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$ e $P \in \mathcal{P}_d^p(^nE, F)$ então teremos P absolutamente p somante sobre E.

O teorema anterior, juntamente com essa proposição nos levam ao seguinte resultado.

Proposição 91

Se $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < s$ então

$$\mathcal{P}_m^{(s,p/n,p)}(^nE, F) \subset \mathcal{M}^{(s,p)}(E, F)$$

Demonstração:

De fato se $P \in \mathcal{P}_m^{(s,p/n,p)}$, $T \in L_{as}^s(F, Z)$ teremos $TP \in \mathcal{P}_{as}^{(p/n,p)}(^nE, F)$. Logo TP é p somante para qualquer $a \in E$ e portanto $P \in \mathcal{M}^{(s,p)}(E, F)$

Proposição 92

Sejam $T \in L(E,F)$, $f : V \longrightarrow Z$ onde $V \subset F$, $a \in E$ com $T(a) \in V$. Se f é (s,p) misto somante em $T(a)$,então fT é (s,p) misto somante em a.

Demonstração:

Basta notar que se $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(E)$, teremos $Tx_i \in l_p^u(F)$ e daí

$$(f(T(a)+T(x_i)) - f(T(a)))_{i\in\mathbb{N}} \in l_{(s,p)}^m(Z)$$

Proposição 93

Se $dimE < \infty$ e $f : V \longrightarrow F$, $V \subset E$ é diferenciável em $a \in V$, então f é p somante em a e consequentemente (s,p) misto somante em a.

Demonstração:

Teremos

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + r(h), \text{ onde } \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

Daí, se $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(E)$ teremos $f(a+x_i) - f(a) = f'(a)x_i + r(x_i)$ e poderemos tomar δ tal que se $\|x_i\| < \delta$ teremos $\|r(x_i)\| \leq \|x_i\|$. Tomando n_0 tal que $\|x_i\| \leq \delta$ se $i \geq n_0$, teremos

$$\|(f(a+x_i) - f(a))_{i\geq n_0}\|_p = \|(f'(a)x_i + r(x_i))_{i\geq n_0}\|_p \leq \|(f'(a)x_i)_{i\geq n_0}\|_p + \|r(x_i)\|_p \leq$$

$$\|f'(a)\|\|x_i\|_p + \|x_i\|_p \leq \infty.$$

De maneira análoga podemos provar a proposição abaixo.

Proposição 94

Seja $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ onde $V \subset E$ e f diferenciável em $a \in V$. f será p somante (misto somante) em a se e somente se $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ é p somante (misto somante) na origem.

Exemplo 4

Seja H espaço de Hilbert real de dimensão infinita e $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \|x\|^2 =< x, x >$$

Então temos

$$f(a+h) - f(a) = 2 < a, h > +\|h\|^2$$

e daí como $r(h) = \|h\|^2$ não é 2 somante temos que f não é 2 somante em a, $\forall a \in$ H.

Dado $V \subset E$(espaço complexo) aberto, definimos

$$H(V, F) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : V \longrightarrow F;\ f \text{ é holomorfa em } V\}$$

Teorema 95

Seja $f \in H(V,F) \cap \mathcal{M}^{(s,p)}(V,F)(s \geq 1)$. Então se $a \in V$ teremos $\hat{d}f(a)$ (s;p) misto somante na origem.

Demonstração:

Dados $x_1, \ldots, x_n \in E, b_1, \ldots, b_k \in F'$ teremos

$$\begin{aligned}
&(\textstyle\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^k | < \hat{d}f(a)(x_i) - \hat{d}f(a)(0), b_j > |^s)^{p/s})^{1/p} = \\
&(\textstyle\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^k | < \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(a+\lambda x_i)}{\lambda^{n+1}}d\lambda - \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(a)}{\lambda^{n+1}}d\lambda, b_j > |^s)^{p/s})^{1/p} = \\
&\tfrac{n!}{2\pi}(\textstyle\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^k | < \int_{|\lambda=\rho} \frac{f(a+\lambda x_i)-f(a)}{\lambda^{n+1}}d\lambda, b_j > |^s)^{p/s})^{1/p} \leq \\
&\tfrac{n!}{2\pi\rho^n}(\textstyle\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^k \int_{|\lambda|=\rho} | < f(a+\lambda x_i) - f(a), b_j > |^s)d\lambda)^{p/s})^{1/p} \leq \\
&\tfrac{n!}{2\pi\rho^n}(\textstyle\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^k |f(a+\lambda_i x_i) - f(a), b_j > |^s)^{p/s})^{1/p} = \\
&\tfrac{n!}{2\pi\rho^n}(\textstyle\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^k | < f(a+\lambda_i x_i) - f(a), b_j > |^s)^{p/s})^{1/p}
\end{aligned}$$

com $|\lambda_i| = \rho$

Mas $\|(\lambda_i x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} = \rho\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p}$ e daí pelo teorema [85] segue o resultado.

O resultado abaixo pode ser encontrado em Mário [16].

Teorema 96

Se $f \in H(A, \mathbb{K})$, então f é 1 somante para todo $a \in A$.

Proposição 97

Se f é uma função real definida sobre A e sua diferencial(de Fréchet) é absolutamente p somante em a, para todo $a \in A$, então f é absolutamente p somante.

Teorema 98

Sejam $f : V \subset E \longrightarrow F$ (s,p) misto somante em $a \in V$ e $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(E)$ tal que $a + x_i \in V$ para qualquer i. Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que para toda sequência $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(E)$ com $\|x_i - y_i\|_{w,p} < \delta$ e $a + y_i \in V$ para todo i, teremos

$$\|(f(a+x_i) - f(a+y_i))_{i=n_0}^{n_0+n}\|_{m,(s,p)} \leq \epsilon, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração:

Suponhamos existir ϵ tal que a afirmação seja falsa.Então dado $\delta = 1/2$, existem $(y_i^1)_{i\in\mathbb{N}}, n_1$ tal que $\|x_i - y_i^1\|_{w,p} \leq 1/2$ mas

$$\|(f(a+x_i) - f(a+y_i^1))_{i=1}^{n_1}\|_{m,(s,p)} > \epsilon$$

Dado agora $\delta = 1/2^2$ existem $(y_i^2)_{i\in\mathbb{N}}, n_2$ tal que $\|x_i - y_i^2\|_{w,p} \leq 1/2^2$ mas

$$\|(f(a+x_i) - f(a+y_i^2))_{i=n_1+1}^{n_2}\|_{m,(s,p)} > \epsilon.$$

Continuando desta forma , dado $\delta_k = 1/2^k$ existem $(y_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$, n_k tal que

$$\|x_i - y_i^k\|_{w,p} \leq 1/2^k, \text{ mas } \|(f(a+x_i) - f(a+y_i^k))_{i=n_{k-1}+1}^{n_2}\|_{m,(s,p)} > \epsilon$$

Tomamos agora a seqüência $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ da forma abaixo:

$$y_1^1, \ldots, y_{n_1}^1, y_{n_1+1}^2, \ldots, y_{n_2+1}^3, \ldots, y_{n_3}^3, \ldots,$$

e é claro que $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(E)$ mas $(f(a+x_i) - f(a+y_i))_{i\in\mathbb{N}} \notin l_{(s,p)}^m(F)$, absurdo pois notando que $f(a+x_i) - f(a+y_i) = f(a+x_i) - f(a) + f(a) - f(a+y_i)$ e sendo f (s,p) misto somante em a, teremos $f(a+x_i) - f(a)$ e $f(a) - f(a+y_i) \in l_{(s,p)}^m(F)$.

Doravante, dado $a \in V$ anotaremos

$$l_p^u(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(E); \; a + x_i \in V\}$$

Corolário 99

Sejam $f : V \subset E \longrightarrow F$ continua e misto somante em $a \in V$. Então $\hat{f} : l_p^u(V) \longrightarrow l_{(s,p)}^m(F)$ dada por

$$\hat{f}((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (f(a+x_i) - f(a))_{i\in\mathbb{N}}$$

é continua.

Demonstração:

Mostremos que $\widehat{f}$ é continua em $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(V)$.Pelo teorema anterior sabemos que dado $\epsilon > 0$, existem n_0, δ_1, tal que $\forall (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p^u(V)$ com $\|x_i - y_i\|_{w,p} < \delta_1$ teremos

$$\|(f(a+x_i) - f(a+y_i))_{i\geq n_0}\|_{m,(s,p)} \leq \epsilon/2.$$

É claro que pela continuidade de f existe δ_2 tal que se $\|x_i - y_i\| < \delta_2$ teremos

$$(\sum_{i=1}^{n_0-1} \|f(a+x_i) - f(a+y_i)\|^p)^{1/p} \leq \epsilon/2$$

e daí tomando $\delta = \text{mínimo}\{\delta_1, \delta_2\}$ teremos

$$\|x_i - y_i\|_{w,p} < \delta \Longrightarrow \|(f(a+x_i) - f(a+y_i))_{i\in\mathbb{N}}\|_{m,(s,p)} \leq \epsilon.$$

Corolário 100

Seja $f : V \subset E \longrightarrow F$ continua. Então f será (s,p) misto somante em $a \in V$ se, e somente se, $\widehat{f}$dada acima está bem definida e é continua.

9-Holomorfia (s,p) Misto Somante

A presente seção, tem por objetivo introduzir um tipo de holomorfia gerado por polinômios estudados anteriormente. Inicialmente recordemos as seguintes definições:

Definição:

Um **tipo de Holomorfia** θ de E em F é uma sequência de espaços de Banach $\mathcal{P}_\theta(^nE;F)$, $n = 0, 1, \dots$ onde a norma de cada espaço será denotada por $\| \ \|_\theta$ tal que se verificam as seguintes condições:

(i) Cada $\mathcal{P}_\theta(^nE;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE;F)$;

(ii) $\mathcal{P}_\theta(^0E;F) = F$;

(iii) Existe $\sigma \geq 1$ tal que dados k, $n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, $P \in \mathcal{P}_\theta(^nE;F)$ e $x \in E$; teremos $\widehat{d}^kP(x) \in \mathcal{P}_\theta(^kE;F)$ e

$$\|\frac{1}{k!}\widehat{d}^kP(x)\|_\theta \leq \|\sigma\|^n \, \|P\|_\theta \, \|x\|^{n-k}$$

Definição:

$f \in H(A;F)$, $A \subset E$ aberto, será dita de **tipo θ (holomorfia) em a $\in$ A** se :

(i) $\hat{d}^kf(a) \ \in \mathcal{P}_\theta(^nE;F)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

(ii)Existem constantes $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$ tais que

$$\|\frac{1}{k!}\widehat{d}^kf(a)\|_\theta \leq C_1.C_2^k \ \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots$$

$f \in H(A;F)$ será dita de tipo θ (holomorfia) se f é de tipo θ (holomorfia) em a, para todo a em A.

Passemos agora ao objetivo anteriormente descrito, e para tanto, supondo E e F espaços de Banach, doravante anotaremos $\mathcal{M}_{(s,p)}(^nE;F)$ e $\Pi_p(^nE;F)$, para designar os subespaços vetoriais de $\mathcal{P}(^nE;F)$, formados pelos polinômios (s,p) misto somantes e absolutamente p somantes sobre E, respectivamente.

Definição:

Seja $f : A \to F$, $A \subset E$ aberto então definiremos

$$V_{p,A} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_p^u(E);\ x_1 \in A \text{ e } x_1 + x_i \in A\ \forall\ i \geq 2\}$$

Vale observar que $V_{p,A}$ é aberto em $l_p^u(E)$

Definição:

Seja $f : A \to F$. Se f é absolutamente p somante sobre A, definimos $\psi(f) : V_{p,A} \to l_p(F)$ por

$$\psi(f)((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (f(x_1), f(x_1 + x_2) - f(x_1), \ldots, f(x_1 + x_i) - f(x_1), \ldots)$$

Teorema 101[Matos[16]]

Se $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é absolutamente p somante sobre E, então $\psi(P)$ é continua sobre $V_{p,E} = l_p^u(E)$.

Teorema 102[Matos[16]]

A imagem de $\Pi_p(^nE; F)$ por ψ é fechada para a norma natural de $\mathcal{P}(^nl_p^u(E); l_p(F))$.

Observação:

Em função dos teoremos anteriores faremos

$$\|P\|_{\pi_p} = \|\psi(P)\| \quad \forall\ P \in \Pi_p(^nE; F).$$

Teremos daí que $\Pi_p(^nE; F)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\ \|_{\pi_p}$.

Teorema 103[Matos[16]]

$(\Pi_p(^nE; F), \|.\|_{\pi_p})_{n \in \mathbb{N}_0}$ é um tipo de holomorfia de E em F.

Denotaremos por $\mathcal{H}_{\pi_p}(A; F)$ o subespaço vetorial de $H(E; F)$ formado pelas aplicações que são de tipo Π_p(holomorfia).

Teorema 104[Matos[16]]

Cada f $\in H(A;\mathbb{K})$ é absolutamente somante em A.

Definição:

Seja $f : A \to F$. Se f é (s,p) misto somante sobre A definimos $\varphi(f) : V_{p,A} \to l^m_{(s,p)}(F)$ por

$$\varphi(f)((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (f(x_1), f(x_1+x_2)-f(x_1), \ldots, f(x_1+x_i)-f(x_1), \ldots)$$

Teorema 105

Seja P $\in \mathcal{P}(^nE;F)$ (s,p) misto somante sobre E. Então $\varphi(P)$ é contínua sobre $l^u_p(E) = V_{p,E}$.

Demonstração:

Inicialmente notamos que se $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, então

$$\begin{aligned} g_{x_1,x_2,\ldots,x_n} : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|(y_i)_{i=1}^{n+1}\|_{m,(s,p)} \end{aligned}$$

onde $y_1 = P(x)$, $y_{i+1} = P(x+x_i) - P(x)$ se $i \geq 1$ é contínua e daí

$$G_{k,x_1,\ldots,x_n} = \{x \in E;\ g_{x_1,x_2,\ldots,x_n}(x) \leq k\}$$

é fechado para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$

Agora, fixados $k \in \mathbb{N}$ e $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^u_p(E)$ teremos

$$G_{k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}}} = \{x \in E;\ \|\varphi(P)(x, x_1, x_2, \ldots)\|_{m,(s,p)} \leq k\} \text{ fechado}$$

pois

$$G_{k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}}} = \bigcap_{n\geq 1} G_{k,x_1,x_2,\ldots,x_n}$$

e consequentemente para k e n fixados teremos

$$G_{k,n} = \bigcap_{\|(x_i)\|_{w,p}\leq 1/2^n} G_{k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}}} \text{ fechado}$$

Mas dado $x \in E$, pelo teorema 82, existe n tal que se $\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_{w,p} \leq 1/2^n$, teremos $\|(P(x+x_i) - P(x))_{i\in\mathbb{N}}\|_{m,(s,p)} \leq 1$. Daí
$\|(P(x), P(x+x_1) - P(x), \ldots)\|_{m,(s,p)} \leq 1 + \|P(x)\|$, o que nos leva a concluir que

$$x \in G_{k,(x_i)}, \;\; \forall \;\; (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \;\text{ com } \|(x_i)\|_{w,p} \leq 1/2^n \;\text{ e } k \geq 1 + \|P(x)\|$$

ou ainda

$$x \in G_{k,n} \Rightarrow E \subset \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} G_{k,n}$$

O teorema de Baire, nos diz então que interior de $G_{k,n}$ é não vazio para algum k e n.
Logo existe r e x_0 tal que se $\|x - x_0\| \leq r$ teremos $x \in G_{k,n}$
Tomando agora $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ onde $y_1 = x_0$ e $y_i = 0$ para $i \geq 2$ e $\delta = min\{r, 1/2^n\}$ teremos:
$\|(x_i) - (y_i)\|_{w,p} \leq \delta \Rightarrow \|x_1 - x_0\| \leq r$ e $\|(x_i)_{i\geq 2}\|_{w,p} \leq 1/2^n$ e consequentemente $\varphi(P)(x_i) \leq k$, isto é, $\varphi(P)$ é limitado numa bola e daí continuo.

A demonstração acima, nos mostra que poderíamos generalizar o resultado acima, qual seja:

Teorema 106

Se f é (s,p) misto somante sobre $A \subset E$ aberto com valores em F então

$$\varphi(f) : V_{p,A} \longrightarrow l^m_{(s,p)}(F)$$

definida como acima é localmente limitada num aberto denso de $V_{p,A}$.

Proposição 107

O conjunto $\Gamma = \{\varphi(P);\;\; P \in \mathcal{M}_{(s,p)}(^nE;F)\}$ é fechado para a norma natural de $\mathcal{P}(^n l^u_p(E); l^m_{(s,p)}(F))$.

Demonstração:

Suponhamos $\varphi(P_k)$ convergindo para h e mostremos que existe $P \in \mathcal{M}_{(s,p)}(^nE;F)$ tal que $\varphi(P) = h$.

É claro que se π_j é a j-ésima projeção de $l^m_{(s,p)}(F)$ sobre F, teremos $(\pi_j \circ \varphi(P_k))$ convergindo para $\pi_j \circ h$ uniformemente sobre a bola unitária de $l^u_p(E)$ e daí podemos definir

$$P(x) = \lim_{k\to\infty} P_k(x) = \pi_1(h(x,0,0,\ldots)) \; \forall x \in E$$

e então P será um polinômio n-homogêneo e contínuo, pois é limitado sobre a bola unitária.Teremos ainda

$$P(x+x_i) - P(x) = \lim_{k\to\infty} (P_k(x+x_i) - P_k(x)) = \pi_{i+1}(h(x, x_1, x_2, \ldots))$$

Mas como $h \in \mathcal{P}({}^n l_p^u(E); l_{(s,p)}^m(F))$ teremos $\varphi(P) = h$ e P (s,p) misto somante.

Doravante, se $P \in \mathcal{M}_{(s,p)}({}^n E; F)$ anotaremos

$$\|P\|_{\mu_{(s,p)}} = \|\varphi(P)\|$$

A proposição anterior nos garante que $\mathcal{M}_{(s,p)}({}^n E, F)$ é um espaço de Banach sobre $\|.\|_{\mu_{(s,p)}}$.

Proposição 108

Sejam $P \in \mathcal{M}_{(s,p)}({}^n E; F)$ e $T \in L(F; Z)$. Então $TP \in \mathcal{M}_{(s,p)}({}^n E, Z)$ e além disso

$$\|TP\|_{\mu_{(s,p)}} \leq \|T\| \|P\|_{\mu_{(s,p)}}$$

.

Demonstração:

$\|\varphi(TP)\| = \sup_{(x_i)\in B_{l_p^u(E)}} \|\varphi(TP)(x_i)\|_{m,(s,p)} = \sup \|(TP(x_1), TP(x_1+x_2) - TP(x_1), \ldots)\|_{m,(s,p)} \leq$
$\|T\| \sup \|\varphi P(x_i)\|_{m,(s,p)} = \|T\| \|P\|_{\mu_{(s,p)}}$

Vale observar que a proposição acima ainda continua válida, para $P \in \Pi_p({}^n E; F)$ e $\|TP\|_{\pi_p}$.

Proposição 109

Se $P \in \mathcal{M}_{(s,p)}({}^n E; F)$, $p \geq 1$ então

$$\hat{d}^k \varphi(P)(a, 0)(x, (x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \varphi(\hat{d}^k P(a))(x, (x_j)_{j\in\mathbb{N}})$$

para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ e $(a, 0)$ e $(x, (x_j)_{j\in\mathbb{N}})$ em $l_p^u(E)$.

Demonstração :

$1/k!\widehat{d}^k\varphi(P)(a,0)(x,(x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = 1/2\pi i\int_{|\lambda|=\rho}(\frac{P(a+\lambda x)}{\lambda^{k+1}},(\frac{P(a+\lambda x+\lambda x_j)-P(a+\lambda x)}{\lambda^{k+1}}))d\lambda =$
$1/k!\varphi(\widehat{d}^kP(a))(x,(x_j))$.

Proposição 110

Se $p \geq 1$ então $(\mathcal{M}_{(s,p)}(^nE;F), \|.\|_{\mu_{(s,p)}})_{n\in\mathbb{N}_0}$ é um tipo de holomorfia de E sobre F, como definido inicialmente.

Demonstração:

Basta observar que

$$\|1/k!\widehat{d}^kP(a)\|_{m,(s,p)} = \|1/k!\varphi(\widehat{d}^kP(a))\|_{m,(s,p)} = \|1/k!\widehat{d}^k\varphi(P)(a,0)\| \leq \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{n^n}{n!}\|P\|_{\mu_{(s,p)}}\|a\|^{n-k}$$

para todo $a \in E$ e $k = 1, 2, \ldots, n$.

Vale dizer,que as demonstrações acima , foram simplesmente adaptações dos resultados demonstrados em [16] por Matos ,para o caso p somante .

Lema 111

Suponhamos $f \in H(E;F)$ tal que para todo Z Banach e $T \in L^s_{as}(F;Z)$ tenhamos $Tf \in \mathcal{H}_{\pi_p}(E;Z)$. Então existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$\|\frac{1}{k!}\widehat{d}^kTf(a)\|_{\pi_p} = \|\frac{1}{k!}T\widehat{d}^kf(a)\|_{\pi_p} \leq C_1C_2^k$$

para todo k,n $\in \mathbb{N}$ e T com $\|T\|_{as,s} \leq 1$.

Demonstração:

Se tal não acontecesse, dado $n \in \mathbb{N}$ exisitriam k_n, Z_n e $T_n \in L^s_{as}(F;Z_n)$ tal que

$$\|\frac{1}{k_n!}T_n\widehat{d}^{k_n}f(a)\|_{\pi_p} > nn^{k_n}, \text{ com } \|T_n\|_{as,s} \leq 1/2^n$$

Então procedendo como no teorema 36, fazemos $Z = l_2(Z_n)$, $T = \sum_{i\in\mathbb{N}} J_iT_i$ e daí teremos

$$nn^{k_n} < \|\frac{1}{k_n!}T_n\widehat{d}^{k_n}f(a)\|_{\pi_p} = \|\frac{1}{k_n!}Q_nT\widehat{d}^{k_n}f(a)\|_{\pi_p} \leq \|\frac{1}{k_n!}T\widehat{d}^{k_n}f(a)\|_{\pi_p}$$

o que contraria $Tf \in \mathcal{H}_{\pi_p}(E;Z)$.

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema de caracterização abaixo.

<u>**Teorema 112**</u>

Se $s \geq 1$, então $f \in H(E;F)$ é de tipo $\mathcal{M}_{(s,p)}$ (holomorfia), se e somente se, para todo Z Banach e $T \in L^s_{as}(F;Z)$ tivermos Tf de tipo Π_p (holomorfia).

Demonstração:

($\Rightarrow$) Dado Z Banach e $T \in L^s_{as}(F;Z)$, como $\hat{d}^k f(a) \in \mathcal{M}_{(s,p)}(^nE;F)$ teremos $TF \in \Pi_p(^nE;F)$. Teremos ainda

$$\|\frac{1}{k!}\hat{d}^kTf(a)\|_{\pi_p} = \frac{1}{k!}\sup_{(x_i)\in B_{l_p^u(E)}} \|\psi(\hat{d}^kTf(a))(x_i)\| =$$

$$\frac{1}{k!}\sup \|(\hat{d}^kTf(a)(x_1), \hat{d}^kTf(a)(x_1+x_2) - \hat{d}^kTf(a)(x_1), \ldots)\|_p$$

Mas temos

$$\hat{d}^kf(a)(x_1) = \tau_1 y_1,\ \ \hat{d}^kf(a)(x_1+x_i) - \hat{d}^kf(a)(x_1) = \tau_i y_i,\ i = 2,3,\ldots \text{ com}$$

$$\|(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_r \|(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_{w,s} \leq (1+\epsilon)\|(\hat{d}^kf(a)(x_1), \hat{d}^kf(a)(x_1+x_2) - \hat{d}^kf(a)(x_1), \ldots)\|_{m,(s,p)}$$

Teremos então

$$\|\frac{1}{k!}\hat{d}^kTf(a)\|_{\pi_p} = \frac{1}{k!}\sup\|\tau_iTy_i\|_p \leq \frac{1}{k!}\sup\|\tau_i\|_r\|Ty_i\|_s \leq$$

$$\frac{1}{k!}\sup\|\tau_i\|_r\|T\|_{as,s}\|y_i\|_{w,s} \leq (1+\epsilon)\frac{1}{k!}\|T\|_{as,s}\|\varphi(\hat{d}^kf(a)\| =$$

$$= (1+\epsilon)\|T\|_{as,s}\|\frac{1}{k!}\hat{d}^kf(a)\|_{m,(s,p)} \leq (1+\epsilon)\|T\|_{as,s}C_1C_2^k.$$

Logo $Tf \in \mathcal{H}_{\pi_p}(E;F)$.

($\Leftarrow$)É claro que $\hat{d}^kf(a) \in \mathcal{M}_{(s;p)}(^nE;F)$.

Agora dada $\mu \in W(B_{F'})$ definimos

$$\begin{aligned} T_\mu : F &\longrightarrow L_s(B_{F'},\mu) \\ y &\longmapsto T(y)(a) = < a, y > \end{aligned}$$

Temos então $T_\mu \in L^s_{as}(F; L_s(B_{F'},\mu))$ e além disso $\|T_\mu\|_{as,s} \leq 1$

Como $T_\mu f \in \mathcal{H}_{\pi_p}(E; L_s(B_{F'},\mu))$, teremos pelo lema anterior C_1, C_2 tais que

$$\|\frac{1}{k!}\hat{d}^kT_\mu f(a)\|_{\pi_p} \leq C_1C_2^k\ \ \forall k \in \mathbb{N},\ \mu \in W(B_{F'})$$

e portanto

$$\| \frac{1}{k!} \psi(\widehat{d}^k T_\mu f(a))(x_i) \|_p \leq C_1 C_2^k \quad \forall \mu \in W(B_{F'}),\ k \in \mathbb{N} \text{ e } (x_i) \in B_{l_p^u(E)}$$

ou ainda

$$\frac{1}{k!}((\int_{B_{F'}} | < \widehat{d}^k f(a)(x_1), b > |^s)\, d\mu(b))^{p/s} +$$

$$+ \sum_{i \geq 2} (\int_{B_{F'}} | < \widehat{d}^k f(a)(x_1 + x_2) - \widehat{d}^k f(a)(x_1), b > |^s\, d\mu(b))^{p/s})^{1/p} \leq C_1 C_2^k$$

Usando a caracterização de sequências (s,p) somantes teremos

$$\| \frac{1}{k!} (\widehat{d}^k f(a)(x_1), \widehat{d}^k f(a)(x_1 + x_2) - \widehat{d}^k f(a)(x_1), \ldots) \|_{m,(s,p)} \leq C_1 C_2^k$$

$\forall (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B_{l_p^u(E)}$, e daí

$$\| \frac{1}{k!} \varphi(\widehat{d}^k f(a)) \| \leq C_1 C_2^k \quad \text{ou} \quad \| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k f(a) \|_{\mu_{(s,p)}} \leq C_1 C_2^k$$

e consequentemente $f \in \mathcal{H}_{\mu_{(s,p)}}(E; F)$.

Proposição 113[Matos]

Se $f \in \mathcal{H}_{\pi_p}(A; F)$ então f é absolutamente p somante sobre A.

Proposição 114

Sejam $s \geq 1$, $f \in \mathcal{H}_{\mu_{(s,p)}}(A; F)$, então f é (s,p) misto somante sobre A.

Demonstração:

Basta notar que, pelo teorema anterior, teremos $Tf \in \mathcal{H}_{\pi_p}(E; Z)$ para todo Z Banach e $T \in L_{as}^s(F; Z)$. Logo, pela proposição acima, Tf é absolutamente p-somante sobre A e consequentemente f é (s,p) misto somante sobre A.

Trabalharemos agora, somente com polinômios tomando valores em K, isto é, $P \in \mathcal{P}(^n E)$ onde E é espaço de Banach.

Dado um espaço de Banach E, é claro que ao mudarmos sua norma, possivelmente alteraremos também a norma sobre o espaço dos polinômios. Logo, temos a seguinte definição:

Definição

Um espaço normado de polinômios n-homogêneos $(\mathcal{P}_\theta(^nE), \|.\|_\theta)$ sobre E será dito **intrínseco**, se depende somente da estrutura de espaço vetorial de E, isto é se $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ são normas equivalente sobre E, então

$$P \in (\mathcal{P}_\theta(^nE), \|.\|_{\theta 1}) \Longleftrightarrow P \in (\mathcal{P}_\theta(^nE), \|.\|_{\theta 2}).$$

Se $\|.\|_1$ representa uma norma sobre E, então $B_{\|.\|_1}$ representará a bola unitária correspondente.

Definição

Diremos que um tipo de holomorfia θ de E em K, é um tipo **α-holomorfia** se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\mathcal{P}_\theta(^nE)$ é um espaço de polinômios intrínseco para cada $n \in \mathbb{N}$

(ii) σ na definição inicial da seção, não depende da norma considerada em E

(iii) Se $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ são normas sobre E e C é um número real positivo tal que $CB_{\|.\|_1} \subset B_{\|.\|_2}$ então teremos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$C^n\|P_n\|_{\theta 1} \leq \|P_n\|_{\theta 2}$$

para todo $P_n \in \mathcal{P}_\theta(^nE)$.

Estamos fazendo $\|P_n\|_{\theta i} = \|P_n\|_\theta$ com $\|.\|_i$ sobre E, $i = 1, 2$.

Teorema 115

Para $p \geq 1$, $(\mathcal{M}_{(s,p)}(^nE), \|.\|_{\mu_{(s,p)}})$ é um α-tipo holomorfia.

Demonstração:

A condição (i) acima é facilmente verificada. Já o ítem (ii) é uma consequência direta da proposição 110. Provemos o ítem (iii). Dado C real positivo teremos:

$$C^n\|P_n\|_{\mu_{(s,p)}1} = \sup_{\|x_i\|_{w,p,1} \leq 1} \|\varphi(P_n)(Cx_i)\|.$$

Fazendo $y_i = Cx_i$ vem

$$C^n \|P_n\|_{\mu_{(s,p)}1} = \sup_{\|y_i\|_{w,p,1} \leq C} \|\varphi(P_n)(y_i)\| \leq \sup_{\|y_i\|_{w,p,2} \leq 1} \|\varphi(P_n)(y_i)\| = \|P_n\|_{\mu_{(s,p)}2}$$

Acima estamos fazendo $\|x_i\|_{w,p,j} = \|x_i\|_{w,p}$ quando tomamos $\|.\|_j$, $j = 1, 2$ sobre E

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR, R., *An Application of Singer's Theorem to Homogeneous Polynomials*, Contemporary Math., 144, (1993), 1-8.

[2] ALENCAR, R., MATOS, M. *Some Classes of Multilinear Mappings Between Banach Spaces*, Publ. Depto. Analisis Mat., Univ. Complut. Madrid., 12, (1989)

[3] ARON, R., LACRUZ,M., RYAN, R., TONGUE, A., *The Generalized Rademacher Functions. Noti di Matematica*, XII, (1992), 15-25.

[4] BOTELHO, G. M. A., *Tipo e Cotipo: caracterização via Funções de Rademacher Generalizadas e Contribuições à Teoria de Aplicações Multilineares e Polinômios Homogêneos em Espaços de Banach*, Tese de Doutorado. (1995). Unicamp, Brasil.

[5] CARL, B., DEFANT, A.,*Tensor Products and Grothendieck Type Inequalities of Operators in L_p Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc.,331, (1992), 55-76.

[6] DEFANT, A. , FLORET, K., *Tensor Norms and Operator Ideals.North-Holland Math. Studies*, 176, (1993).

[7] DIESTEL, J., JARCHOW, H., TONGUE, A. *Absolutely Summing Operators. Cambridge studies in advanced mathematics*, 43. Cambridge Univ. Press, (1995).

[8] DINEEN, S. *Holomorphy types on a Banach space*, Studia Math 39, (1971), 242-288.

[9] FLORET, K., MATOS, M. C. *Aplication of a Khintchine inequality to holomorphic mappings*, Math. Nach, 176, (1995).

[10] HEINRICH, S. *Ultraproducts in Banach spaces theory*, Journ. Reine Angew. Math. 313, (1980), p.72-104.

[11] JUNEK, H., MATOS, M. C. *On unconditionally p-summing and weakly p-converging polynomials*, Dickie Math, 111, (1997).

[12] LINDSTRÖM, J., RYAN, R. A., *Applications of ultraproducts to infinite dimensional holomorphy*, Math. Scand. 71, (1992), 164-174.

[13] MATOS, M. C., *Absolutely summing holomorphic mappings*, An. Acad. bras. Ci. 68, (1996), 1-13.

[14] MATOS, M. C.,*On multilinear mappings of nuclear type*, Revista Matematica 6(1), (1993), 61-81.

[15] MATOS, M. C.,*The Dvoretzky-Rogers theorem for polynomial and multilinear mappings*, 45 Seminário Brasileiro de Análise, 1997.

[16] MATOS, M. C.*Non-linear absolutely summing mappings between Banach spaces*, 46 Seminário Brasileiro de Análise,1997.

[17] MAUREY, B., *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs à valeurs dans les espaces L^p*, Soc. Math. France, Astérisque 11, (1974).

[18] MUJICA, J., *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Math. Studies 120, (1986).

[19] NACHBIN, L., *Topology on spaces of holomorphic mappings*, Ergebn. Math. Grenzgeb. 47. Springer-Verlag, New York.

[20] PIETSCH, A., *Ideals of Multilinear Functionals (designs of a theory)*,Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their applications in Theorical Physics. Leipzig, (1983), 185-200.

[21] PIETSCH, A.,*Operator Ideals*, North-Holland, Amsterdam (1980).

[22] TOMCZAK-JAEGERMANN, N., *Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals*, Longman Scientific e Technical, (1989).

[23] TONGE, A., MELÉNDEZ, Y.,*Absolutely Summing Polynomials* - Preprint

[24] ZALDUENDO, I., *A Canonical Extension for Analytic Functions on Banach Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 320, (1990), 747-763.